

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Tecnologia e Geociências
Departamento de Engenharia Mecânica

FÍSICA BÁSICA DAS MOTOS

Fábio Magnani

Conteúdo

1	Introdução	3
2	Forças Controladas pelo Piloto	6
2.1	Propulsão	6
2.2	Frenagem	6
3	Resistências ao Movimento	8
3.1	Resistência Gravitacional	9
3.2	Resistência Aerodinâmica	10
3.3	Resistência à Rolagem	11
3.4	Resistência Inercial	11
4	A Moto Estática	13
5	A Moto em Movimento	15
6	Discussões Sobre a Equação Geral	18
7	Movimento Instantâneo	20
8	Índices de Utilização	21
9	Limites	25
9.1	Velocidade Máxima	26
9.2	Perda de Aderência	26
9.3	Empinamento	26
10	Curvas	29
10.1	Ângulo de Inclinação Lateral nas Curvas	32
11	Velocidade Máxima em Curvas	34
12	Frenagem até a Parada Completa	38
13	Atividades	39

1 Introdução

Há vários bons livros sobre a física das motos. O mais conhecido é Cossalter (2006), seguido por Bradley (1996), Foale (2006), Cocco (2013) e Tanelli, Corno e Saveresi (2014). Livros sobre bicicletas e automóveis também têm partes que podem ser usadas nas motos, como Wilson (2004), Baird (2010) e Jazar (2014). Finalmente, há alguns trabalhos nossos, por exemplo um de frenagem de Magnani e Cunha (2017), e outro sobre a integração do motor e da moto de Magnani, de Andrade e Willmersdorf (2017).

O objetivo desta aula é apresentar uma breve introdução ao assunto, que serve tanto como motivação para seguir aquele material mais avançado, quanto para prosseguir nas nossas disciplinas de *Engenharia da Motocicleta* e de *Propulsão de Bicicletas e Motocicletas*. Embora o modelo matemático aqui apresentado seja relativamente simples, o que limita a sua precisão quantitativa, ele é geral o suficiente para estudar fenômenos interessantes como aceleração, frenagem, empinamento, perda de aderência e o comportamento das motos nas curvas.

O estudo deste material pode ser feito seguindo as seguintes fases: discussão da física durante a aula, estudo das equações matemáticas aqui descritas, desenvolvimento de um algoritmo para calcular as tabelas, e, finalmente, o uso desse algoritmo para estender o número de casos estudados.

Nesta aula vamos estudar a física básica das motos. Primeiro veremos quais são as forças que atuam sobre a moto - tanto as forças controladas pelo piloto (*i.e.*, propulsão e frenagem), quanto as forças que resistem ao movimento (*i.e.*, arrasto aerodinâmico, resistência à rolagem, gravidade¹ e

¹A gravidade em alguns casos pode ajudar o movimento, como nos casos de aceleração em descidas ou de frenagem em subidas.

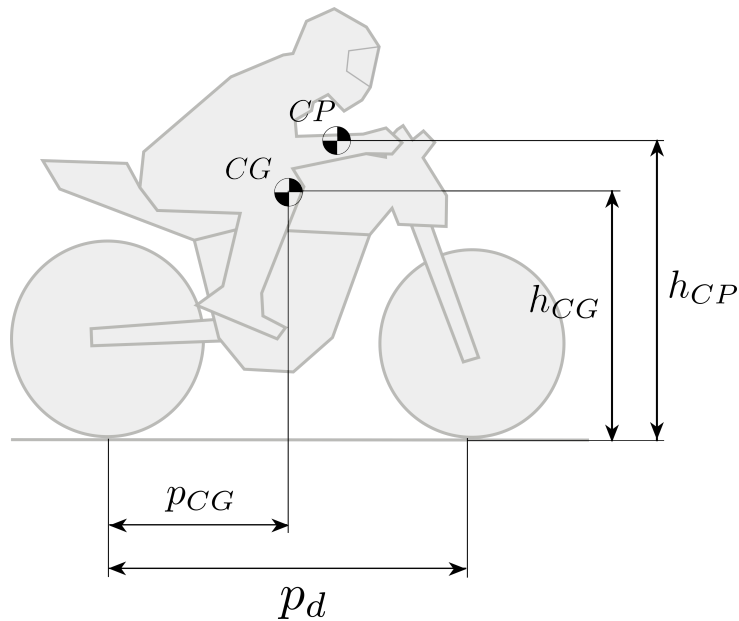


Figura 1: Dimensões

inércia). Seguindo, vamos combinar todas essas forças para estudar o comportamento da moto.

O primeiro exemplo de combinação de forças será o caso em que a moto está estática. Logo em seguida, veremos o caso em que a moto está em movimento. Poderemos calcular então em que condições ela perde a aderência, empina², faz *babalu*³, qual a máxima velocidade em linha reta e nas curvas.

Todos esses fenômenos comentados até aqui são instantâneos, demandando *apenas* a solução de soluções algébricas. No entanto, o modelo matemático que vamos estudar é capaz também de prever o movimento da moto durante a trajetória completa. A dificuldade é que, para isso, precisamos resolver o modelo em sua forma de equação diferencial ordinária, EDO, o que nem sempre é fácil. Vamos então fazer o seguinte: nesta aula montamos as equações gerais, mas aplicamos essas equações ao movimento da moto em apenas um caso especial que pode ser calculado resolvendo uma forma bastante simples da EDO (*i.e.*, o fenômeno de frenagem de uma certa velocidade até a parada completa, desprezando as resistências). Na próxima aula, então, retomamos o estudo com outros casos que precisam de soluções mais difíceis da EDO.

Para começar esta aula, vamos dar uma olhada na Figura 1 e na Tabela

²Levanta a roda dianteira.

³Levanta a roda traseira.

Tabela 1: Dados da moto

Par/res	Valor	Descrição
h_{CG}	0,72	altura do centro de gravidade, m
h_{CP}	0,95	altura do centro de pressão, m
p_d	1,40	distância entre eixos, m
p_{CG}	0,67	distância do CG para o eixo traseiro, m
m_m	170	massa da moto, kg
m_p	80	massa do piloto, kg
μ	0,8	coeficiente de atrito entre o pneu e o piso
k_A	0,35	fator aerodinâmico, kg/m
C_R	0,02	coeficiente de rolagem
P_{max}	22.080	potência máxima, W (22.080 $W = 30 CV$)

¹⁴, que contêm as principais características físicas da moto. Além dessas características, nas aulas mais avançadas estaremos interessados também no momento de inércia da moto⁵, na geometria da direção, na curva de potência do motor, e nas propriedades físicas e geométricas da suspensão e dos pneus⁶.

Mas voltemos agora à nossa moto básica. Em linhas gerais, a potência (P_{max}) tem a ver com a capacidade da moto em ir para a frente, enquanto os outros parâmetros (m_m , m_p , k_A , e C_R) são relacionados com as resistências a esse movimento. As dimensões da moto (h_{CG} ⁷, h_{CP} ⁸, p_d , e p_{CG}) influenciam a transferência de peso quando a moto está acelerando ou freando⁹. Por fim, quanto maior o coeficiente de atrito (μ), mais fácil manter a aderência nas acelerações, frenagens e curvas.

⁴Os valores da tabela serão usados nos exemplos desta aula. Cada moto real tem seus valores específicos, diferentes destes da tabela.

⁵Incluindo o centro de gravidade do chassi, das rodas e de todas as partes rotacionais do motor.

⁶A moto deste modelo não tem suspensão, *i.e.*, é totalmente rígida, e o pneu tem coeficiente de atrito constante com o piso

⁷O centro de gravidade é o ponto fictício onde a inércia e a gravidade agiriam se fossem aplicadas em um único ponto do conjunto. Na verdade, a gravidade e a inércia agem sobre todo o volume do conjunto.

⁸O centro de pressão é o ponto fictício onde a força de arrasto aerodinâmico agiria se fosse aplicada a um único ponto. Na verdade, o arrasto é aplicado em toda a superfície do conjunto.

⁹Quando a moto acelera, por exemplo, a moto tende a girar para trás, fazendo com que o peso fique maior na roda traseira e menor na roda dianteira, o que chamamos de transferência de peso.

2 Forças Controladas pelo Piloto

O piloto controla a moto usando o acelerador, os freios, as marchas, a direção e a sua posição corporal (*i.e.*, levantando, sentando, reclinando para frente ou para trás, inclinando para um ou outro lado). Nesta aula vamos ver o efeito do acelerador e dos freios.

2.1 Propulsão

Quando o piloto aciona o acelerador, na verdade ele está abrindo a válvula borboleta na entrada do motor, o que aumenta a vazão da mistura ar-combustível para dentro do cilindro, que aumenta consequentemente a liberação de energia durante a queima e, então, a potência mecânica que sai do motor. Essa potência mecânica é transmitida pela transmissão (primária, caixa de marchas e final) para a roda traseira. Como o pneu está em contato com o chão, a potência da roda traseira tenta empurrar a Terra para trás, mas, como a Terra é muito pesada, a força de reação da Terra é que empurra a moto para a frente. Chamaremos essa força de reação da Terra de força de propulsão, F_{pro} . Lembrando que $P = FV$, temos:

$$F_{pro} = \frac{P}{V} = \frac{\alpha P_{max}}{V} \quad (1)$$

Na qual P é a potência do motor¹⁰, V é a velocidade da moto, α é acionamento do acelerador (varia de 0 a 1), e P_{max} é a máxima potência disponível pelo motor¹¹. A Figura 2 mostra uma representação da força de propulsão agindo sobre a moto.

2.2 Frenagem

Durante a frenagem, o piloto aciona o freio. O freio por sua vez tenta parar a roda. A roda então tenta arrastar o chão para a frente junto com ela. Como a Terra é muito pesada, a sua reação é que tenta parar a moto. Para uma boa frenagem, o sistema de freio tem que ser bem projetado (para parar a

¹⁰Neste momento estamos desprezando as perdas entre a saída do motor e a roda, que mais tarde será corrigida usando uma eficiência de transmissão, η_t .

¹¹Em um motor real, a potência máxima disponível depende da rotação do motor, mas inicialmente vamos considerá-la constante.

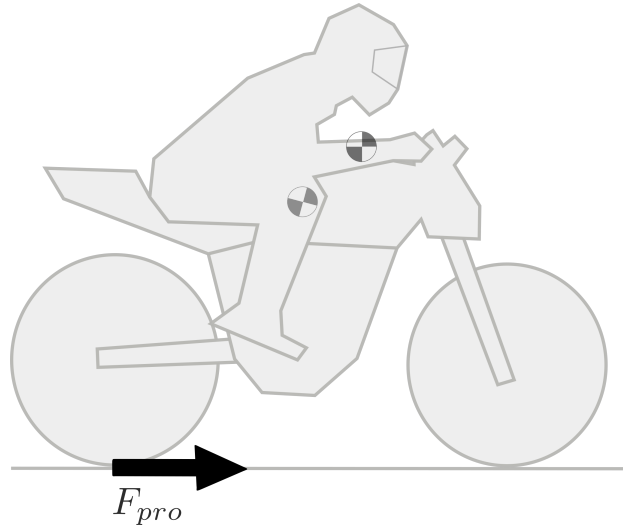


Figura 2: Força de propulsão

roda), e deve existir um bom atrito entre o pneu e a pista (para parar a moto)¹². Não adianta nada o freio ser muito forte se não há atrito suficiente entre o pneu e o chão¹³, também não adianta ter muito atrito se o freio não for bom. É preciso harmonia entre os dois (o freio parando a roda, e a roda parando a moto).

Cada roda tem uma certa força de atrito disponível para ser usada, que depende da força normal e do coeficiente de atrito.

$$F_{\text{disp},d} = \mu N_{rd} \quad (2)$$

$$F_{\text{disp},t} = \mu N_{rt} \quad (3)$$

Usaremos a variável β para representar o percentual da utilização da força de atrito disponível¹⁴. Quando β for nulo, o freio não está sendo acionado; e quando for 1, o piloto está tentando usar todo o atrito disponível.

$$F_{\text{frn},d} = \beta_d F_{\text{disp},d} \quad (4)$$

¹²Além disso, como veremos depois, a geometria da moto também é importante, pois em uma frenagem muito forte pode acontecer o levantamento da roda traseira.

¹³Imagine alguém tentando frear em um lago congelado. A roda irá parar, mas a moto não.

¹⁴Cuidado deve ser tomado porque o atrito, além de ser necessário para a frenagem, também é necessário para fazer curvas. Então, se o piloto usar completamente o freio no máximo durante a curva, $\beta = 1$, certamente perderá a aderência, uma vez que não restará força de atrito para manter a força centrípeta

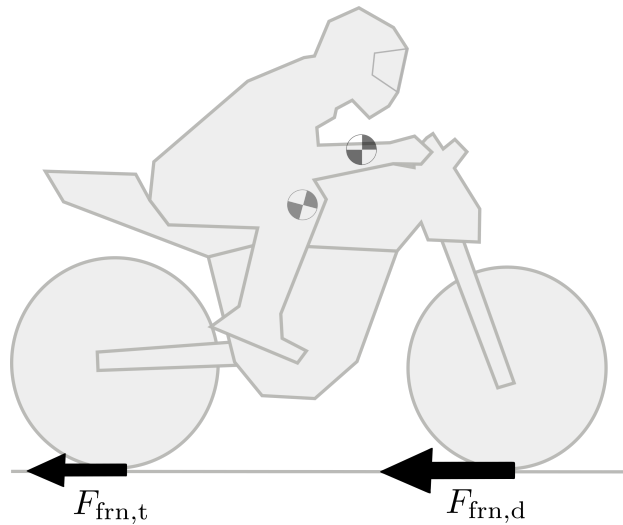


Figura 3: Forças de frenagem

$$F_{frn,t} = \beta_t F_{disp,t} \quad (5)$$

Em geral a força de frenagem é maior na dianteira do que na traseira, já que durante a desaceleração há uma transferência de peso para a roda da frente, aumentando assim a sua força de atrito disponível (como veremos mais adiante). Deve-se atentar que em geral o atrito é visto como algo indesejável, como no caso do atrito entre as peças internas do motor, que causa perda de potência. Mas no caso do pneu, o atrito é muito bem-vindo, já que é o responsável por manter a aderência entre o pneu e o piso, permitindo a propulsão, a frenagem e as curvas. Em aulas posteriores, estudaremos o atrito do pneu com um pouco mais de detalhes, já que as equações 2 e 3 são bastante simplificadas.

3 Resistências ao Movimento

As próximas forças não são controladas pelo piloto: gravitacional, arrasto aerodinâmico¹⁵, resistência à rolagem e inércia.

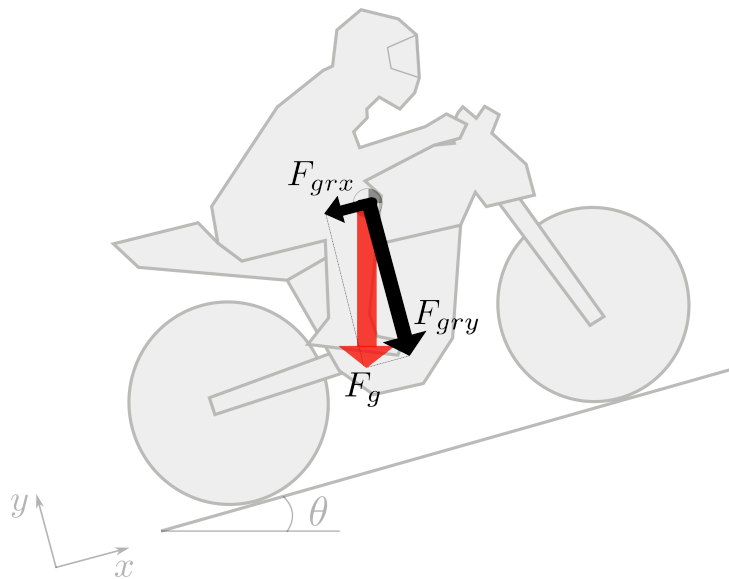


Figura 4: Força da gravidade decomposta

3.1 Resistência Gravitacional

A massa do conjunto (m_c) é a soma da massa do piloto (m_p) e da moto (m_m)¹⁶:

$$m_c = m_m + m_p \quad (6)$$

Em uma subida, a força da gravidade dificulta o movimento, já na descida ela ajuda. Olhando para a Figura 4, vemos a ação da gravidade sobre o conjunto piloto-moto¹⁷.

$$F_g = -m_c g \quad (7)$$

Como a moto está em um plano com a inclinação θ , podemos decompor a gravidade em um componente x na direção do movimento e outro componente y na direção perpendicular ao chão:

¹⁵O piloto pode controlar um pouco o arrasto aerodinâmico ficando mais levantado ou mais reclinado sobre o tanque

¹⁶Em modelos mais avançados, e obviamente no mundo real, o piloto se move em relação à moto, mudando assim o amortecimento do conjunto, a aerodinâmica e a transferência de peso. Mas nesta aula vamos imaginar que o conjunto moto-piloto é um só. Em geral, nesses modelos mais complexos, a massa combinada é multiplicada por um fator para levar em conta a inércia rotacional das partes internas do motor, como rodas e o eixo do motor.

¹⁷Em todas as equações, estamos sempre interessados na massa do conjunto moto-piloto.

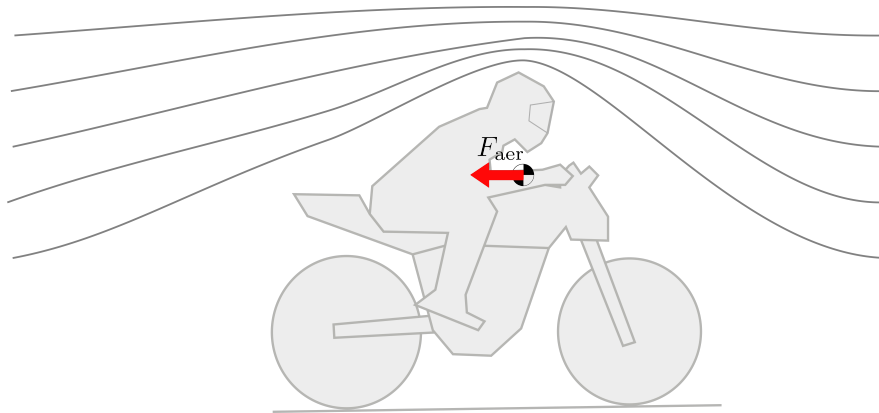


Figura 5: Resistência Aerodinâmica

$$F_{grx} = F_g \text{sen}\theta = -m_c g \text{sen}\theta \quad (8)$$

$$F_{gry} = F_g \text{cos}\theta = -m_c g \text{cos}\theta \quad (9)$$

As Equações 8-9 também valem para declives ($\theta < 0$), bem como todas as outras desta aula.

3.2 Resistência Aerodinâmica

Quando a moto se movimentar, ela precisa deslocar o ar a sua volta (Figura 5). A força necessária para fazer isso é chamada de arrasto aerodinâmico, que depende da forma da moto, do seu tamanho e das propriedades do fluido. Essas características são concentradas no fator aerodinâmico, k_A . A velocidade que importa no arrasto aerodinâmico é a velocidade relativa da moto (V) e do vento¹⁸ (W). Devido à relação entre a velocidade e a força de arrasto ser quadrática (e portanto a relação entre a velocidade e a potência de arrasto ser cúbica¹⁹), essa força passa a ser a mais importante em velocidades mais altas.

$$F_{\text{aer}} = -\frac{1}{2}\rho C_D A (V - W)^2 = -k_A (V - W)^2 \quad (10)$$

¹⁸Na moto real e nos modelos mais avançados o movimento relativo do ar tem também outros efeitos sobre a moto, como uma força na direção y e outra na direção lateral

¹⁹ $F \sim V^2 \implies P = FV \sim V^3$. Então, considerando apenas o arrasto aerodinâmico, para dobrar a velocidade máxima de uma moto é preciso multiplicar a potência do seu motor por 8!

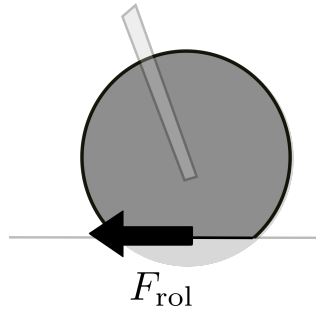


Figura 6: Resistência à rolagem (simplificada)

3.3 Resistência à Rolagem

A resistência à rolagem tem a ver principalmente com a força necessária para deformar os pneus da moto (Figura 6). No entanto, a resistência à rolagem inclui também a força para deformar a suspensão (mola e amortecedor) e para vencer os atritos internos. Nesta aula iremos concentrar todos esses fenômenos no coeficiente de rolagem C_R , e calcular a força de resistência à rolagem por:

$$F_{\text{rol}} = -C_R |F_{gy}| = -C_R m_c g \cos\theta \quad (11)$$

Na realidade, a resistência à rolagem não é simplesmente proporcional ao peso como expresso na Equação 11, nem tampouco a direção da força é necessariamente longitudinal. No entanto, essa é uma boa aproximação para este modelo básico.

3.4 Resistência Inercial

A Figura 7(a) mostra uma força sendo aplicada à traseira de uma moto (podemos imaginar alguém empurrando a moto). Como consequência dessa força, a moto será acelerada para a frente ($F = ma$, 2ª Lei de Newton).

É costume representar a inércia (ma) como se fosse uma força que resiste ao movimento - o que claramente não é verdade, pois, se assim o fosse (Figura 7(b)), as duas forças iriam se cancelar e a moto ficaria parada. No entanto, do ponto de vista estritamente de cálculo, essa é uma boa estratégia, pois permite transformar o problema dinâmico (a moto acelerando) em um problema estático (é como se estivéssemos estudando a moto do ponto de vista do piloto, não a partir de um referencial inercial, *e.g.*, o chão). Nesta aula iremos chamar ma de força de inércia (Figura 7(c)), mas sempre lembrando

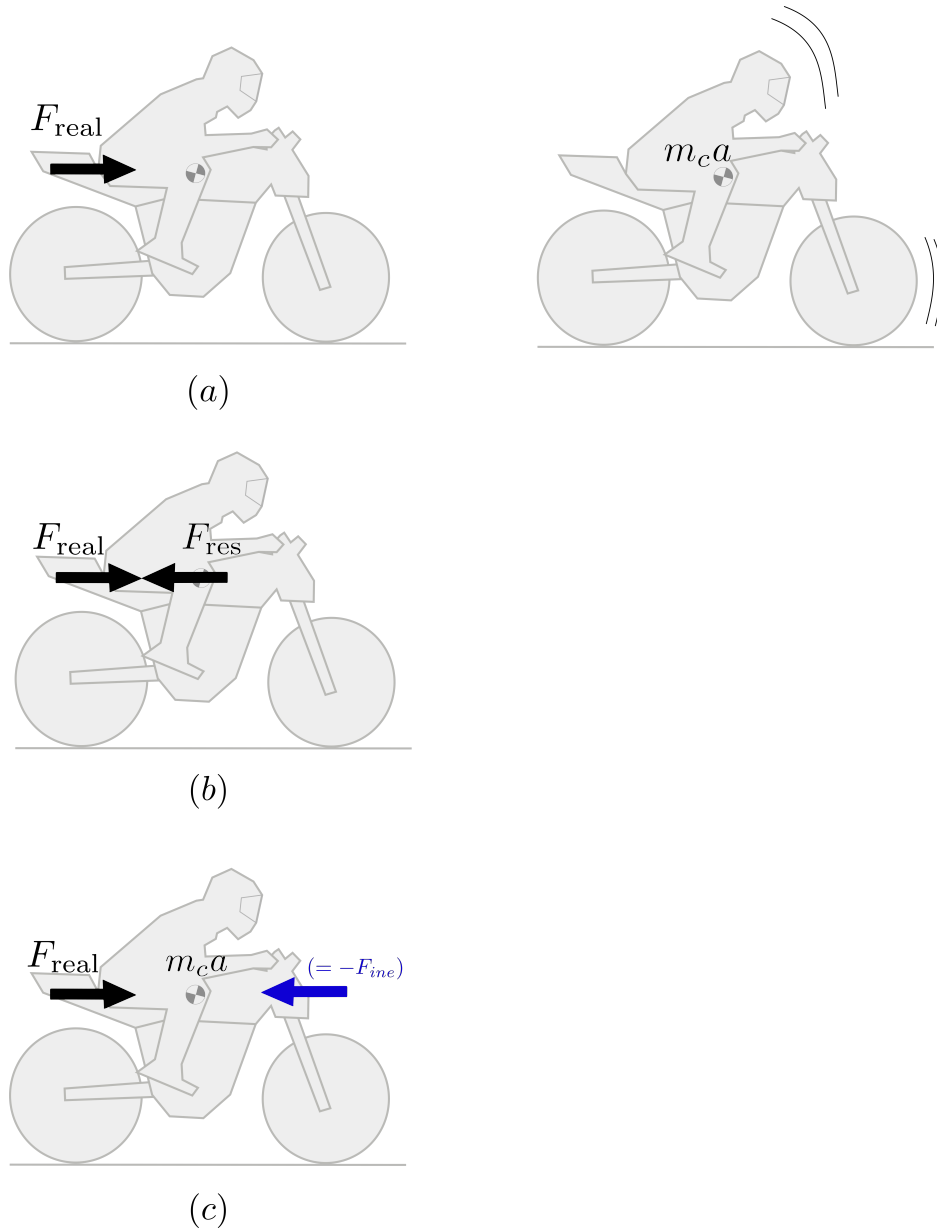


Figura 7: Resistência a inércia

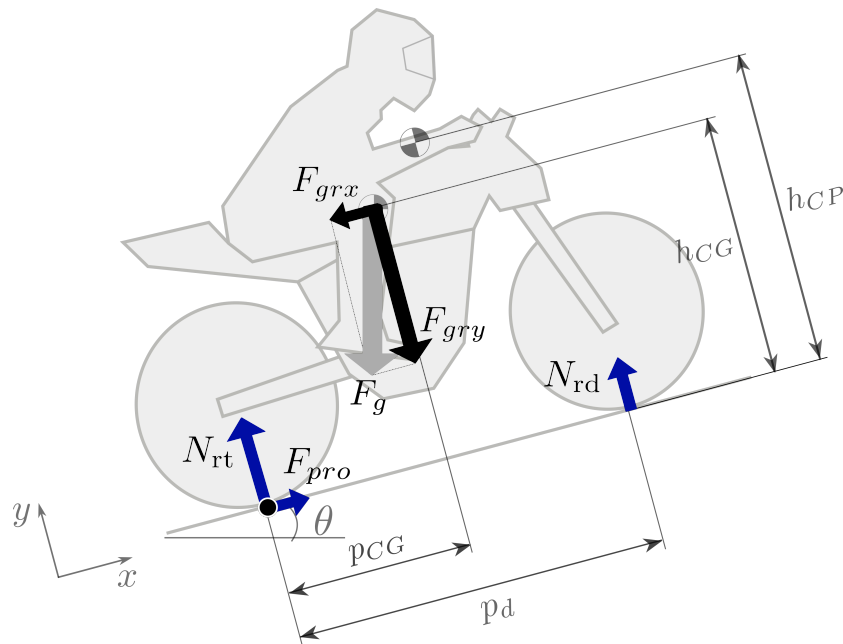


Figura 8: Moto parada, aclave de 15°

que essa força não existe, sendo apenas um artifício de cálculo²⁰.

$$F_{ine} = -m_c a \quad (12)$$

Um detalhe importante é que a inércia sempre resiste ao que o piloto está tentando fazer. Ela dificulta tanto a aceleração quanto a frenagem. Por isso é tão importante ter veículos mais leves²¹.

4 A Moto Estática

Voltando para a Figura 4, vemos que a moto entraria em queda livre se estivesse sujeita apenas à força da gravidade. Outras forças são necessárias para que fique parada. Na verdade, quando a gravidade tenta mover a moto contra o piso, este reage (ação e reação, 3ª Lei de Newton) com duas normais nos pontos de contato²² (Figura 8).

²⁰A "força" que o piloto sente sobre o seu corpo durante a aceleração ou a curva na verdade é o seu corpo tentando permanecer em velocidade constante enquanto uma força empurra para a frente ou para dentro.

²¹Essa é uma das grandes vantagens das bicicletas sobre as motos, das motos sobre os carros, dos carros sobre os caminhões, e assim por diante.

²²A equação é igualada a zero porque não há aceleração no sentido perpendicular ao chão.

$$N_{rd} + N_{rt} + F_{gry} = 0 \quad (13)$$

Fazendo as devidas substituições, chegamos a:

$$N_{rd} + N_{rt} - m_c g \cos \theta = 0 \quad (14)$$

O problema é que a Equação 13 tem duas incógnitas (N_{rd} e N_{rt}). A outra equação é obtida aplicando o balanço de momentos²³ em relação ao ponto de contato da roda traseira com o chão²⁴:

$$F_{grx} h_{CG} - F_{gry} p_{CG} - N_{rd} p_d = 0 \quad (15)$$

ou

$$N_{rd} = \frac{m_c g \cos \theta p_{CG} - m_c g \sin \theta h_{CG}}{p_d} \quad (16)$$

Também, reescrevendo a Equação 14, obtemos:

$$N_{rt} = m_c g \cos \theta - \frac{m_c g \cos \theta p_{CG} - m_c g \sin \theta h_{CG}}{p_d} \quad (17)$$

Resta ainda a análise na direção do movimento, já que a componente longitudinal da gravidade puxa a moto para trás²⁵. Para ela ficar parada, precisamos de uma força para a frente²⁶:

$$F_{pro} + F_{grx} = 0 \quad (18)$$

ou

$$F_{pro} = -m_c g \sin \theta \quad (19)$$

Exemplo 1 *Considere que a moto da Tabela 1 está parada em uma aclive de $\theta = 15^\circ$ (Figura 8). A massa combinada do conjunto é $m_c = 250\text{kg}$ (Equação*

²³Lembrando que o momento de uma força é o valor dessa força vezes o braço de alavanca, esse momento, ou torque, tende a girar a moto.

²⁴Podemos aplicar o balanço de momentos em qualquer ponto, mas sempre é mais interessante aplicar em um ponto que fique na linha de ação do maior número de forças, uma vez que essas não vão aparecer na equação porque o braço de alavanca é nulo.

²⁵Se o ângulo θ for negativo, a componente longitudinal da gravidade, F_{grx} , fará a moto ir para a frente.

²⁶Pode ser o freio, a propulsão ou a própria resistência do pneu, mas neste exemplo vamos imaginar que o piloto está acionando levemente o acelerador para a moto não ir para trás.

Tabela 2: Forças na moto estática

Par/res	Valor
Força	
F_g	-2455 N
F_{grx}	-635 N
F_{gry}	-2371 N
N_{rd}	808 N
N_{rt}	1563 N
F_{pro}	635 N
Moto	
C_R	0
Cinemática	
a	0 m/s ²
V	0 m/s
Pista	
θ	15°

6). Os resultados estão na Tabela 2²⁷. O peso da moto é de 2455 N, sendo que 635 N para trás e 2371 N para o piso. A força de propulsão tem que ser 635 N para equilibrar a componente longitudinal da gravidade. O peso na direção perpendicular ao piso é dividido em 1563 N na roda traseira e 808 N na dianteira. Esses valores são diferentes porque a moto está inclinada para trás e porque $p_{CG}/p_d = 0,48$, fazendo com que o peso maior fique na roda traseira²⁸.

5 A Moto em Movimento

Quando a moto está em movimento, aparecem várias resistências além da gravitacional (como vimos nas Seções 2 e 3): a de arrasto aerodinâmico

²⁷Atenção, se você quiser usar as equações gerais mais à frente para calcular esta tabela, *i.e.*, da Seção 5 em diante, é necessário considerar $V = 0$, $a = 0$ e $C_R = 0$.

²⁸Isso é interessante na subida, pois é quando mais precisamos da tração na roda traseira para dar conta da propulsão.

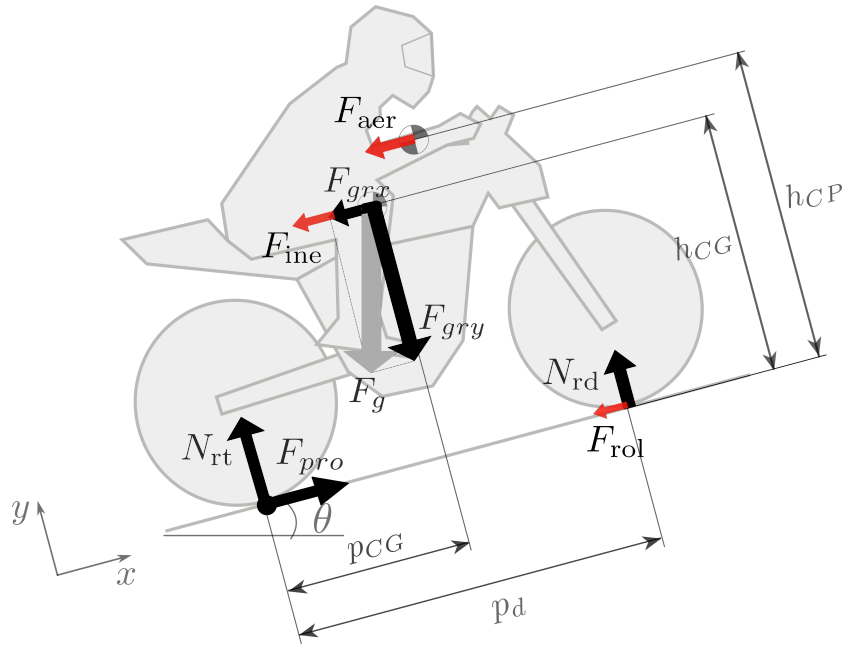


Figura 9: Moto em movimento, aclave de 15°

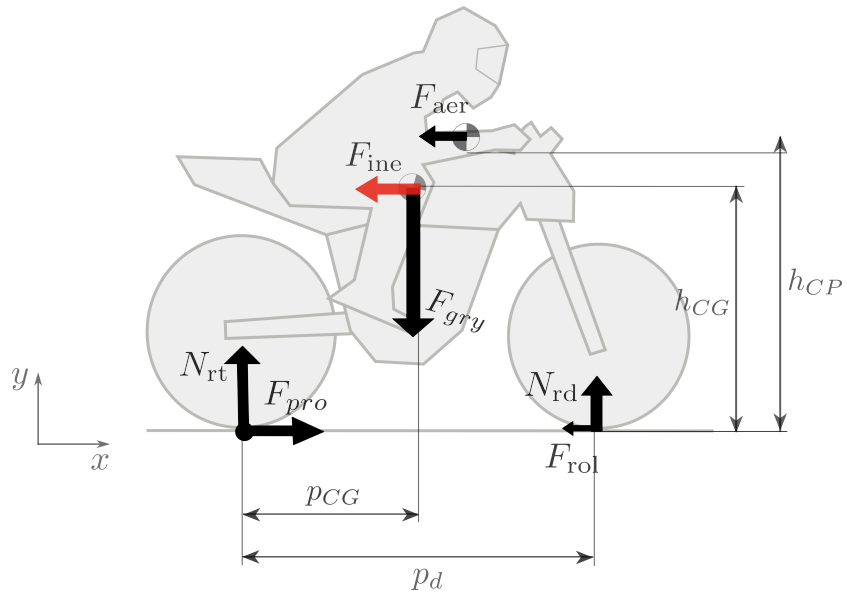


Figura 10: Moto em movimento, aclave de 0°

devido ao deslocamento do ar; a de rolagem causada pela deformação do pneu, da suspensão e do atrito interno; e a de inércia no caso de variação de velocidade. Ainda, o piloto pode acionar o acelerador, o freio traseiro e o freio dianteiro. No caso de movimento, o balanço de forças longitudinais da Equação 18 é generalizado da seguinte forma:

$$F_{\text{pro}} + F_{\text{frn,t}} + F_{\text{frn,d}} + F_{\text{ine}} + F_{\text{aer}} + F_{\text{rol}} + F_{\text{grx}} = 0 \quad (20)$$

Substituindo as Equações das Seções 2 e 3 na Equação 20, obtemos:

$$\frac{\alpha P_{\text{max}}}{V} - \beta_t \mu N_{rt} - \beta_d \mu N_{rd} - m_c a - k_A (V - W)^2 - C_R m_c g \cos \theta - m_c g \sin \theta = 0 \quad (21)$$

ou

$$m_c a = \left(\frac{\alpha P_{\text{max}}}{V} - \beta_t \mu N_{rt} - \beta_d \mu N_{rd} \right) - k_A (V - W)^2 - C_R m_c g \cos \theta - m_c g \sin \theta \quad (22)$$

Que chamaremos de *equação geral na forma algébrica*. Agora, como

$$a = \frac{dV}{dt} \quad (23)$$

podemos reescrever a Equação 21 como:

$$m_c \frac{dV}{dt} = \left(\frac{\alpha P_{\text{max}}}{V} - \beta_t \mu N_{rt} - \beta_d \mu N_{rd} \right) - k_A (V - W)^2 - C_R m_c g \cos \theta - m_c g \sin \theta \quad (24)$$

Que será chamada de *equação geral na forma diferencial*.

As duas normais são calculadas pelo balanço de forças em y e pelo balanço de momentos em relação ao ponto de contato do pneu traseiro com o piso. O balanço de forças resulta em:

$$N_{rt} + N_{rd} + F_{\text{gry}} = 0 \quad (25)$$

ou

$$N_{rt} = m_c g \cos \theta - N_{rd} \quad (26)$$

E o balanço de momentos em:

$$F_{\text{ine}} h_{\text{CG}} + F_{\text{aer}} h_{\text{CP}} + F_{\text{grx}} h_{\text{CG}} - N_{rd} p_d - F_{\text{gry}} p_{\text{CG}} = 0 \quad (27)$$

ou

$$-m_c a h_{CG} - k_A (V - W)^2 h_{CP} - m_c g \sin \theta h_{CG} - N_{rd} p_d + m_c g \cos \theta p_{CG} = 0 \quad (28)$$

Então, as Equações 26 e 28 podem ser escritas como:

$$N_{rt} = m_c g \cos \theta \left(1 - \frac{p_{CG}}{p_d} \right) + \frac{m_c a h_{CG} + k_A (V - W)^2 h_{CP} + m_c g \sin \theta h_{CG}}{p_d} \quad (29)$$

$$N_{rd} = m_c g \cos \theta \frac{p_{CG}}{p_d} - \frac{m_c a h_{CG} + k_A (V - W)^2 h_{CP} + m_c g \sin \theta h_{CG}}{p_d} \quad (30)$$

Observando as últimas duas equações, vemos como a inércia e a resistência aerodinâmica tendem a transferir peso de uma roda para outra (estão no numerador do segundo termo à direita). Podemos chamar esse termo de transferência de peso, J_{tp} :

$$J_{tp} = \frac{m_c a h_{CG} + k_A (V - W)^2 h_{CP} + m_c g \sin \theta h_{CG}}{p_d} \quad (31)$$

Do ponto de vista geométrico, uma maior altura do centro de gravidade, do centro de pressão e do ângulo de aclave também aumentam a transferência. Por outro lado, quanto maior a distância entre eixos (que está no denominador), menor a transferência. Outra forma de escrever as normais é, portanto:

$$N_{rt} = F_{gry} \left(1 - \frac{p_{CG}}{p_d} \right) + J_{tp} \quad (32)$$

$$N_{rd} = F_{gry} \left(\frac{p_{CG}}{p_d} \right) - J_{tp} \quad (33)$$

6 Discussões Sobre a Equação Geral

Vamos resumir um pouco os resultados da Seção 5. Se estivermos interessados em um instante específico (*e.g.*, o início da frenagem, a iminência da perda da aderência), podemos usar a *equação geral na forma algébrica* (Equação 22), que relaciona a aceleração, a , com as demais forças. É essa equação que vamos usar ao longo desta aula.

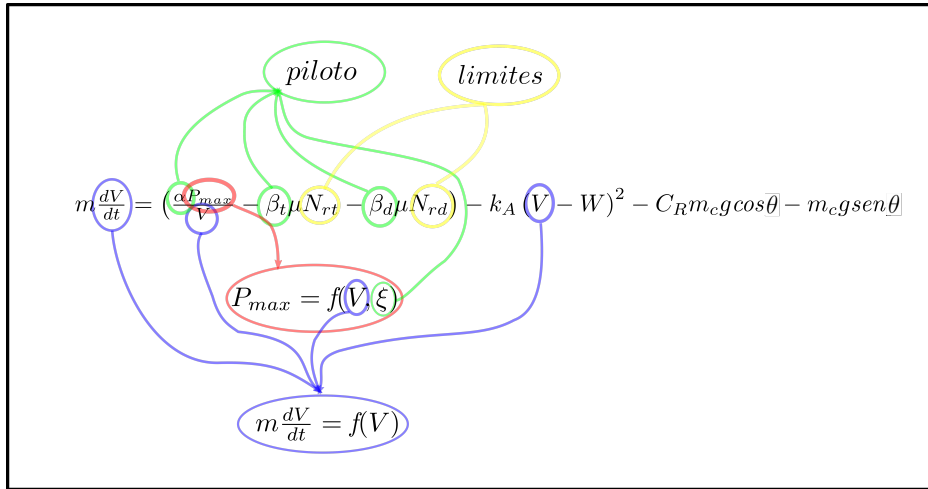


Figura 11: Dificuldades com a equação diferencial

Agora, se quisermos estudar a evolução da velocidade com o tempo, precisamos usar a *equação geral na forma diferencial* (Equação 24), que relaciona a evolução da velocidade, dV/dt , com as forças. Faremos isso apenas na próxima aula, mas vamos dar uma olhada rapidamente nas dificuldades que irão aparecer.

A Equação 24 é uma Equação Diferencial Ordinária do tipo:

$$\frac{dV}{dt} = f(V) \tag{34}$$

Há uma diferença fundamental entre resolver a *equação geral na forma algébrica* (Equação 22) e a *equação geral na forma diferencial* (Equação 24). Na primeira, para um determinado valor de V obtemos um valor de a (ou qualquer outra combinação de variáveis que aparecem na equação), mas esses valores valem apenas para aquele instante. Isso porque, como a moto é acelerada, assim que calculamos a aceleração para uma certa velocidade, a aceleração imediatamente muda o valor daquela velocidade, que já não é mais a mesma. A solução da Equação 24, por outro lado, não é um valor, mas sim uma função do tipo:

$$V = f(t) \tag{35}$$

Em outras palavras, ao resolver a equação diferencial calculamos como a moto se comporta em todos os instantes do fenômeno. É bem mais geral e interessante, mas também mais trabalhoso, como veremos na próxima aula.

Olhando a Figura 11, podemos ver algumas das dificuldades para resolver a equação. Primeiro (linha azul), como já dito, trata-se de uma equação

diferencial que precisa ser resolvida com técnicas específicas. Depois (linha vermelha), a potência máxima do motor é uma equação polinomial de segundo ou terceiro grau, o que dificulta a integral. Terceiro (linha verde), o movimento depende de como o piloto se comporta ao usar o acelerador (α), freios (β_t e β_d), e marchas (ξ).

Quarto (linha amarela), algumas soluções podem não ser fisicamente válidas. O modelo desenvolvido aqui considera que a moto é rígida e que as rodas estão sempre em contato com o chão, nunca girando em relação ao seu centro de gravidade. Ao forçar essa condição, as Equações 29 e 30 podem ocasionalmente resultar em normais com valores negativos, o que não seria real. Nesse caso, o modelo desta aula não é válido. Outro problema é que, como veremos mais adiante, além de ser necessário para a aceleração e a frenagem, o atrito também é usado para manter a moto na curva. Por isso há casos em que o nosso modelo apresenta condições para as quais no mundo real o pneu teria perdido a aderência.

Resumindo, para resolver a *equação geral na forma diferencial* (Equação 24) na próxima aula precisaremos de: 1) uma técnica para resolver a equação diferencial ordinária, 2) um modelo de motor (P_{\max}), 3) um modelo de piloto (α, β_t, β_d , e ξ) que inclua um sistema de controle²⁹ para evitar o levantamento das rodas e o deslizamento dos pneus³⁰.

Indo um pouco além, podemos considerar outras complexidades do mundo real: o piloto se mexe em relação à moto, a moto pode girar em relação ao chão (*i.e.*, empinamento, *babalu*), e a geometria da moto muda conforme a direção se move ou a suspensão é acionada. Além disso, durante o percurso podem mudar o atrito entre o pneu e a pista, o ângulos de aclives e declives, e também a direção e a intensidade do vento.

7 Movimento Instantâneo

Nesta seção estudaremos apenas fenômenos instantâneos (*i.e.*, estamos interessados no que está acontecendo em um instante específico, não o que acontece durante toda a trajetória da moto), então podemos usar a *equação geral na forma algébrica* (Equação 22), as equações das normais (29 e 30), e as equações auxiliares da Seção 3. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2 *Voltando ao Exemplo 1, usando as equações da Seção 5, vamos imaginar agora o que aconteceria se a moto estivesse se movendo com velocidade $V=80 \text{ km/h}$ ($= 22,2 \text{ m/s}$) e aceleração $a=0,3 \text{ m/s}^2$ em um aclive*

²⁹Ao menos um sistema de monitoramento que diga que a solução já não é mais válida

³⁰Em uma terceira aula, iremos modelar de forma mais correta a moto nas condições de levantamento das rodas e deslizamento dos pneus

de 15° . Os resultados são mostrados na Tabela 3. Como em todas as outras tabelas desta aula, os parâmetros usados como dados nos cálculos são mostrados em destaque. Neste exemplo, além das condições cinemáticas (V e a), da pista (μ , W , R e θ)³¹, da moto (k_A e C_R), nós também especificamos que os freios não estavam sendo acionados ($\beta_t=0$ e $\beta_d=0$). Os valores não destacados são os resultados das equações. Comparando a Tabela 3 (moto em movimento) com a Tabela 2 (moto estática), vemos agora como a normal dianteira diminuiu (a inércia e o arrasto aerodinâmico tendem a transferir o peso para trás), e como agora é necessária uma maior força de propulsão (pois as resistências ao movimento, F_{aer} , F_{rol} e F_{ine} , aumentaram).

Exemplo 3 Neste exemplo (dados e resultados na Tabela 4) a moto roda em um plano horizontal ($\theta=0^\circ$), mas agora com aceleração bem maior, de 3 m/s^2 . Comparando com o exemplo 2, várias forças são bem parecidas (e.g., normais, propulsão, arrasto e rolagem), pois o aumento na resistência inercial (causada pelo aumento na aceleração) ocasionalmente compensou a diminuição na componente x da gravidade (causada pela redução no ângulo de aclive).

Exemplo 4 Agora a moto freia com aceleração -3 m/s^2 (dados e resultados na Tabela 5). Neste caso, fizemos $\alpha = 0$ e $\beta_d=\beta_t$ ³². Uma diferença para os exemplos anteriores é que agora o peso foi transferido para a roda dianteira. Os dois freios estão utilizando 27% do atrito disponível e a utilização da normal traseira é de 21%, havendo, portanto, uma boa margem para aumentar essa frenagem sem o risco de perder a aderência ou levantar a roda traseira.

8 Índices de Utilização

As variáveis desta seção não são estritamente necessárias, mas são convenientes na análise dos resultados. Vamos definir quatro índices de utilização que, quando alcançarem o valor unitário, indicarão que há algum problema no modelo da motocicleta.

³¹O raio de curvatura da curva, R , somente será usado nas seções adiante, mas já vamos deixar na tabela para facilitar as comparações futuras. Considerar $R = \infty$ é o mesmo que dizer que a moto está em uma reta

³²Não significa que o piloto esteja usando a mesma força nos dois freios, mas sim que os dois freios estão usando o mesmo percentual do atrito disponível, lembrando que esses dependem da normal em cada roda específica (ver Equações 2 a 5).

Tabela 3: Início de aceleração (15°)

Par/res	Valor	Par/res	Valor
Cinemática		Pista	
V	80 km/h	μ	$0,8$
a	$0,3 \text{ m/s}^2$	W	0 m/s
Força		R	$\infty \text{ m}$
F_g	-2455 N	θ	15°
F_{grx}	-635 N	Moto	
F_{gry}	-2371 N	k_A	$0,35 \text{ kg/m}$
N_{rd}	652 N	C_R	$0,02$
N_{rt}	1719 N	Controle	
F_{pro}	931 N	α	$0,94$
$F_{frn,d}$	0 N	β_d	0
$F_{frn,t}$	0 N	β_t	0
F_{aer}	-173 N	Percentual	
F_{rol}	-47 N	$u_{ad,d}$	0
F_{ine}	-75 N	$u_{ad,t}$	$0,68$
$F_{cen,d}$	0 N	$u_{no,d}$	$0,43$
$F_{cen,t}$	0 N	$u_{no,t}$	$-0,39$
$ F_{at,d} $	0 N	Potência	
$ F_{at,t} $	931 N	\dot{P}_{pro}	20.681 W
$ F_{disp,d} $	522 N		
$ F_{disp,t} $	1375 N		
$N_{est,d}$	1135 N		
$N_{est,t}$	1236 N		

Tabela 4: Início de aceleração (0°)

Par/res	Valor	Par/res	Valor
Cinemática		Pista	
V	80 km/h	μ	$0,8$
a	3 m/s^2	W	0 m/s
Força		R	$\infty \text{ m}$
F_g	-2455 N	θ	0°
F_{grx}	0 N	Moto	
F_{gry}	-2455 N	k_A	$0,35 \text{ kg/m}$
N_{rd}	672 N	C_R	$0,02$
N_{rt}	1783 N	Controle	
F_{pro}	972 N	α	$0,98$
$F_{frn,d}$	0 N	β_d	0
$F_{frn,t}$	0 N	β_t	0
F_{aer}	-173 N	Percentual	
F_{rol}	-49 N	$u_{ad,d}$	0
F_{ine}	-750 N	$u_{ad,t}$	$0,68$
$F_{cen,d}$	0 N	$u_{no,d}$	$0,43$
$F_{cen,t}$	0 N	$u_{no,t}$	$-0,39$
$ F_{at,d} $	0 N	Potência	
$ F_{at,t} $	972 N	\dot{P}_{pro}	21.599 W
$ F_{disp,d} $	538 N		
$ F_{disp,t} $	1426 N		
$N_{est,d}$	1175 N		
$N_{est,t}$	1280 N		

Tabela 5: Início de frenagem

Par/res	Valor	Par/res	Valor
Cinemática		Pista	
V	80 km/h	μ	0,8
a	-3 m/s ²	W	0 m/s
		R	∞ m
		θ	0°
Força		Moto	
F_g	-2455 N	k_A	0,35 kg/m
F_{grx}	0 N	C_R	0,02
F_{gry}	-2455 N		
N_{rd}	1443 N	Controle	
N_{rt}	1012 N	α	0
F_{pro}	0 N	$\beta_t = \beta_d$	
$F_{frn,d}$	-311 N	β_t	0,27
$F_{frn,t}$	-218 N	β_d	0,27
F_{aer}	-173 N		
F_{rol}	-49 N	Percentual	
F_{ine}	750 N	$u_{ad,d}$	0,27
$F_{cen,d}$	0 N	$u_{ad,t}$	0,27
$F_{cen,t}$	0 N	$u_{no,d}$	-0,23
$ F_{at,d} $	311 N	$u_{no,t}$	0,21
$ F_{at,t} $	218 N		
$ F_{disp,d} $	1155 N	Potência	
$ F_{disp,t} $	810 N	\dot{P}_{pro}	0 W
$N_{est,d}$	1280 N		
$N_{est,t}$	1175 N		

$$u_{ad,d} = \frac{|F_{at,d}|}{|F_{disp,d}|} \quad (36)$$

$$u_{ad,t} = \frac{|F_{at,t}|}{|F_{disp,t}|} \quad (37)$$

$$u_{no,d} = 1 - \frac{N_{rd}}{N_{est,d}} \quad (38)$$

$$u_{no,t} = 1 - \frac{N_{rt}}{N_{est,t}} \quad (39)$$

Onde³³:

$$N_{est,d} = -F_{gry} \frac{p_{CG}}{p_d} \quad (40)$$

$$N_{est,t} = -F_{gry} \left(1 - \frac{p_{CG}}{p_d} \right) \quad (41)$$

Os índices de utilização da aderência dianteira e traseira, $u_{ad,d}$ e $u_{ad,t}$, indicam a proximidade da perda de aderência (*i.e.*, o percentual do atrito disponível que já foi usado). Os índices de utilização da normal dianteira e traseira, $u_{no,d}$ e $u_{no,t}$, expressam a proximidade das rodas levantarem (*i.e.*, de uma das normais ser nula). É importante lembrar que nosso modelo é bastante simples. Ele *pensa* que as rodas da moto estão sempre ligadas ao chão (como se houvesse algum tipo de gancho) e que a moto continua com o seu movimento mesmo depois que o pneu perdeu a aderência (se a moto real estiver em uma curva nessa situação, sairá da trajetória). Quando qualquer um dos índices de utilização ultrapassar o valor unitário a solução não será mais fisicamente válida (embora continue a gerar valores matematicamente válidos).

9 Limites

Nesta seção veremos como calcular a velocidade máxima e os estados limites tanto para perda de aderência quanto para levantamento das rodas. Como são estados instantâneos, podem ser calculados usando a *equação geral na forma algébrica* (Equação 22).

³³As variáveis $N_{est,d}$ e $N_{est,t}$ representam as normais nas rodas no caso da moto estar estática (*i.e.*, sem a transferência de peso). Esses valores estão nas Equações 38 e 39 apenas como variável de normalização, uma vez que os índices de utilização das normais terão valor unitário sempre que a normal no numerador for nula, independente do valor do denominador

9.1 Velocidade Máxima

Para calcular a velocidade máxima da moto, na Equação 22 nós fazemos $a = 0$ (na máxima velocidade não é mais possível acelerar), $\alpha = 1$ (o piloto está acionando o acelerador ao máximo), $\beta_d = 0$ e $\beta_t = 0$ (os freios não estão sendo acionados).

Exemplo 5 Neste exemplo a moto está em uma pista horizontal ($\theta = 0^\circ$). Como pode ser visto (dados e resultados na Tabela 6) mais de 90% da força de propulsão é usada para vencer o arrasto aerodinâmico, e os restantes menos de 10% para vencer a resistência à rolagem. A moto está usando totalmente a potência do motor, e nessa condição atinge a velocidade máxima de 139,1 km/h.

9.2 Perda de Aderência

Quando todo o atrito é usado³⁴, o pneu perde a aderência. Essa perda de aderência significa que o atrito deixou de ser estático e passou a ser do tipo dinâmico (nesse caso a força de atrito disponível é mais baixa, fazendo com que a moto não consiga mais acelerar, frear ou se manter na curva como antes de perder a aderência).

Exemplo 6 Neste exemplo a moto está a 30 km/h e queremos saber quanto pode ser sua aceleração para que a roda traseira não deslize por falta de atrito (dados e resultados na Tabela 7). Para isso, no nosso modelo nós dizemos que $u_{ad,t}=1$ e calculamos a aceleração para a qual isso ocorrerá ($6,6 \text{ m/s}^2$). Olhando nos resultados, vemos que se o piloto tentar utilizar o acelerador em 65% (i.e., $\alpha = 0,65$) a moto irá perder a aderência traseira³⁵. A utilização da normal dianteira está em 73% (i.e., $u_{no,d}=0,73$), o que significa que, para essa condição, a moto perde a aderência antes de empinar.

9.3 Empinamento

O cálculo do empinamento é bastante parecido com o da perda de aderência, neste caso especificando que $u_{no,d}$ seja igual a 1 (i.e., $N_{rd}=0$).

³⁴Lembrando que o atrito é usado para a propulsão e frenagem, e também para a força centrípeta no caso da moto estar fazendo uma curva.

³⁵ $|F_{at,t}|=F_{pro}=|F_{disp,t}|=\mu N_{rt}$. Neste caso em que a moto está em uma reta, $R = \infty$, não há força centrípeta.

Tabela 6: Velocidade máxima

Par/res	Valor	Par/res	Valor
Cinemática		Pista	
V	139,1 km/h	μ	0,8
a	0 m/s^2	W	0 m/s
Força		R	∞m
F_g	-2455 N	θ	0 °
F_{grx}	0 N	Moto	
F_{gry}	-2455 N	k_A	0,35 kg/m
N_{rd}	820 N	C_R	0,02
N_{rt}	1635 N	Controle	
F_{pro}	572 N	α	1
$F_{frn,d}$	0 N	β_d	0
$F_{frn,t}$	0 N	β_t	0
F_{aer}	-522 N	Percentual	
F_{rol}	-49 N	$u_{ad,d}$	0
F_{ine}	0 N	$u_{ad,t}$	0,44
$F_{cen,d}$	0 N	$u_{no,d}$	0,30
$F_{cen,t}$	0 N	$u_{no,t}$	-0,28
$ F_{at,d} $	0 N	Potência	
$ F_{at,t} $	572 N	\dot{P}_{pro}	22080 W
$ F_{disp,d} $	656 N		
$ F_{disp,t} $	1308 N		
$N_{est,d}$	1175 N		
$N_{est,t}$	1280 N		

Tabela 7: Iminência de perda de aderência traseira

Par/res	Valor	Par/res	Valor
Cinemática		Pista	
V	30 km/h	μ	0,8
a	6,6 m/s ²	W	0 m/s
Força		R	∞ m
F_g	-2455 N	θ	0°
F_{grx}	0 N	Moto	
F_{gry}	-2455 N	k_A	0,35 kg/m
N_{rd}	316 N	C_R	0,02
N_{rt}	2139 N	Controle	
F_{pro}	1711 N	α	0,65
$F_{frn,d}$	0 N	β_d	0
$F_{frn,t}$	0 N	β_t	0
F_{aer}	-24 N	Percentual	
F_{rol}	-49 N	$u_{ad,d}$	0
F_{ine}	-1638 N	$u_{ad,t}$	1
$F_{cen,d}$	0 N	$u_{no,d}$	0,73
$F_{cen,t}$	0 N	$u_{no,t}$	-0,67
$ F_{at,d} $	0 N	Potência	
$ F_{at,t} $	1711 N	\dot{P}_{pro}	14.259 W
$ F_{disp,d} $	253 N		
$ F_{disp,t} $	1711 N		
$N_{est,d}$	1175 N		
$N_{est,t}$	1280 N		

Exemplo 7 Neste exemplo a moto ainda está a 30 km/h, mas agora queremos saber quanto pode ser sua aceleração para que a roda dianteira não empine (dados e resultados na Tabela 8). Para que o empinamento ocorra antes da moto perder a aderência, vamos considerar que o coeficiente de atrito aumentou para 1,0. Para que esse fenômeno ocorra, o piloto precisa utilizar 88% do acelerador, alcançando uma aceleração de 9,0 m/s².

Os exemplos 6 e 7 podem ser refeitos para estudar fenômenos parecidos, mas agora durante a frenagem. Nessa situação, fazemos $\alpha=0$, e deixamos livres β_d e β_t . A perda de aderência se dará para $u_{ad,d}$ ou $u_{ad,t}$ igual a 1. O levantamento da roda traseira ocorrerá quando $u_{no,t}$ for igual a 1. Assim como nos exemplos anteriores, a ocorrência de perda de aderência ou de levantamento da roda traseira durante a frenagem depende da geometria da moto e do atrito, sendo necessário, portanto, mudar o valor de μ para que ocorra um ou outro fenômeno.

10 Curvas

Até agora a moto sempre esteve andando em linha reta. Para a propulsão (e.g., cálculo da velocidade e da potência do motor), não faz muita diferença se a moto está em uma curva ou em uma reta. No entanto, duas grandes diferenças nas curvas são o fato da moto estar inclinada lateralmente³⁶ e o fato de parte do atrito ser usado para a força centrípeta, diminuindo a disponibilidade para usar o atrito para propulsão e frenagem. A Figura 12 mostra a vista superior de uma motocicleta fazendo uma curva de raio R . Sabemos que a força centrípeta necessária para que a moto percorra esse caminho curvilíneo é:

$$F_{cen} = \frac{m_c V^2}{R} \quad (42)$$

Como a força centrípeta ocorre nos dois contatos dos pneus com o chão, vamos dividi-la em duas partes, usando a distância da roda ao centro de gravidade como proporção (ver Figura 13)

$$F_{cen,d} = \frac{m_c V^2}{R} \frac{p_{CG}}{p_d} \quad (43)$$

$$F_{cen,t} = \frac{m_c V^2}{R} \left(1 - \frac{p_{CG}}{p_d} \right) \quad (44)$$

Tabela 8: Iminência de empinamento

Par/res	Valor	Par/res	Valor
Cinemática		Pista	
V	30 km/h	μ	1,0
a	9,0 m/s ²	W	0 m/s
Força		R	∞ m
F_g	-2455 N	θ	0°
F_{grx}	0 N	Moto	
F_{gry}	-2455 N	k_A	0,35 kg/m
N_{rd}	0 N	C_R	0,02
N_{rt}	-2455 N	Controle	
F_{pro}	2326 N	α	0,88
$F_{frn,d}$	0 N	β_d	0
$F_{frn,t}$	0 N	β_t	0
F_{aer}	-24 N	Percentual	
F_{rol}	-49 N	$u_{ad,d}$	0
F_{ine}	-2252 N	$u_{ad,t}$	0,95
$F_{cen,d}$	0 N	$u_{no,d}$	1
$F_{cen,t}$	0 N	$u_{no,t}$	-0,92
$ F_{at,d} $	0 N	Potência	
$ F_{at,t} $	2326 N	\dot{P}_{pro}	19.382 W
$ F_{disp,d} $	0 N		
$ F_{disp,t} $	2455 N		
$N_{est,d}$	1175 N		
$N_{est,t}$	1280 N		

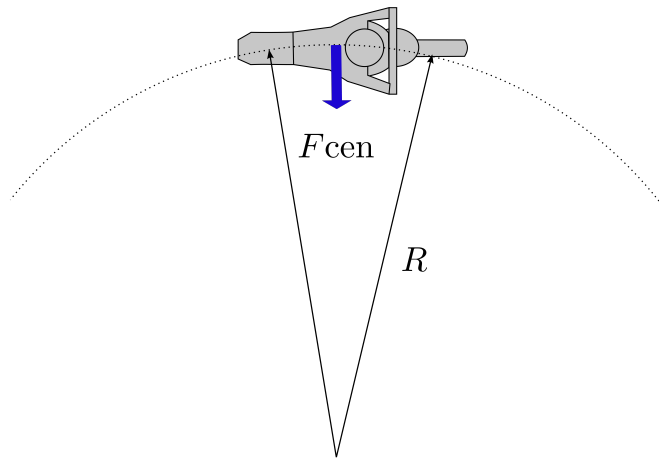


Figura 12: Força centrípeta

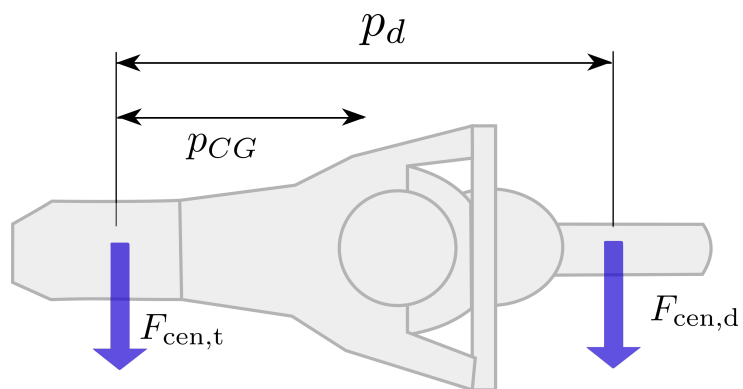


Figura 13: Força centrípeta dividida

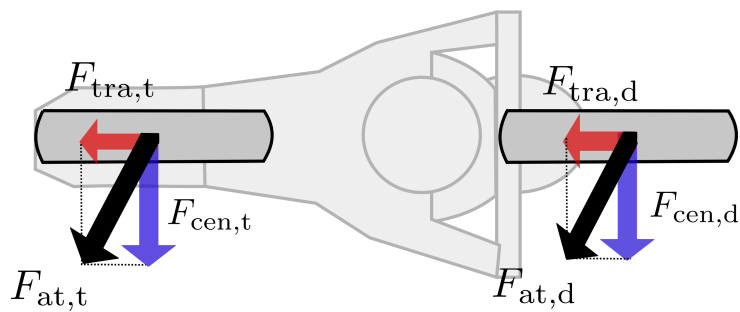


Figura 14: Componentes da força de atrito

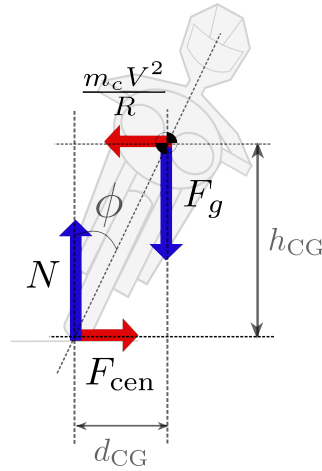


Figura 15: Inclinação lateral

A Figura 14 mostra como a força de atrito em cada roda é a resultante da força centrípeta e da força longitudinal (propulsão ou frenagem). Então, a força de atrito em cada um dos pneus pode ser escrita como:

$$|F_{at,d}| = \sqrt{F_{frn,d}^2 + F_{cen,d}^2} \quad (45)$$

$$|F_{at,t}| = \sqrt{(F_{pro} + F_{frn,t})^2 + F_{cen,t}^2} \quad (46)$$

Portanto, para a moto não perder a aderência na curva, a disponibilidade do atrito sempre tem que ser maior do que a força de atrito efetivamente usada.

Exemplo 8 *Agora a moto está em uma curva com raio $R= 100$ m (dados e resultados na Tabela 9) em velocidade constante de 80 km/h. Percebe-se que as forças centrípeta nas duas rodas têm valores bem superiores à força de propulsão. Mesmo sem o freio estar sendo acionado, o pneu dianteiro está usando 70% do seu atrito disponível ($a_{d,d}=0,70$) e o pneu traseiro 61% ($a_{d,t}=0,61$) por causa da força centrípeta. Neste caso, ainda há uma certa margem para o piloto acelerar ou frear a moto sem perder a aderência.*

10.1 Ângulo de Inclinação Lateral nas Curvas

A Figura 15 mostra a visão frontal de uma moto fazendo uma curva em uma superfície horizontal. Para que a moto não continue na trajetória curvilínea

³⁶Para equilibrar a força da gravidade com a força fictícia inercial rotacional chamada informalmente de "força centrífuga".

Tabela 9: Curvas

Par/res	Valor	Par/res	Valor
Cinemática		Pista	
V	80 km/h	μ	0,8
a	0 m/s ²	W	0 m/s
ϕ	26,7°	R	100 m
Força		θ	0°
F_g	-2455 N	Moto	
F_{grx}	0 N	k_A	0,35 kg/m
F_{gry}	-2455 N	C_R	0,02
N_{rd}	1058 N	Controle	
N_{rt}	1397 N	α	0,22
F_{pro}	222 N	β_d	0
$F_{frn,d}$	0 N	β_t	0
$F_{frn,t}$	0 N	Percentual	
F_{aer}	-173 N	$u_{ad,d}$	0,70
F_{rol}	-49 N	$u_{ad,t}$	0,61
F_{ine}	0 N	$u_{no,d}$	0,10
$F_{cen,d}$	591 N	$u_{no,t}$	-0,10
$F_{cen,t}$	644 N	Potência	
$ F_{at,d} $	591 N	\dot{P}_{pro}	4932 W
$ F_{at,t} $	681 N		
$ F_{disp,d} $	846 N		
$ F_{disp,t} $	1118 N		
$N_{est,d}$	1175 N		
$N_{est,t}$	1280 N		

e não caia, é preciso que a força centrípeta seja equilibrada pela "força centrífuga" (na verdade, que a força centrípeta seja igual à inércia rotacional), que a força gravitacional seja equilibrada pela normal, e que os momentos das duas forças que agem no centro de gravidade se anulem:

$$F_{\text{cen}} = \frac{mV^2}{R} \quad (47)$$

$$N = F_g = mg \quad (48)$$

$$mgd_{\text{CG}} = \frac{mV^2}{R} h_{\text{CG}} \quad (49)$$

$$\frac{d_{\text{CG}}}{h_{\text{CG}}} = \tan \phi = \frac{mV^2}{Rmg} \quad (50)$$

$$\tan \phi = \frac{V^2}{Rg} \quad (51)$$

Exemplo 9 Voltando à moto do exemplo 8, usando a Equação 51 calculamos que essa moto precisa estar inclinada lateralmente em um ângulo de $26,7^\circ$ para fazer a curva a 80 km/h ($=22 \text{ km/h}$).

11 Velocidade Máxima em Curvas

A velocidade máxima em uma curva é aquela na qual um dos dois pneus usa totalmente a sua força de atrito ($u_{\text{ad,d}}$ ou $u_{\text{ad,t}}$ é igual a 1).

Exemplo 10 A moto do exemplo 8 ainda está na curva com raio $R=100 \text{ m}$ (dados e resultados na Tabela 10), mas agora queremos saber qual a máxima velocidade para que não perca a aderência. Para isso, fazemos $u_{\text{ad,d}} = 1$ e calculamos a velocidade³⁷. Neste caso a moto pode fazer a curva a 94 km/h , estado no qual está no limite para perder a aderência na dianteira. Nessa condição, a moto está usando 81% do atrito disponível na roda traseira ($u_{\text{ad,t}} = 0,81$).

Tabela 10: Velocidade máxima na curva

Par/res	Valor	Par/res	Valor
Cinemática		Pista	
V	94 km/h	μ	0,8
a	0 m/s ²	W	0 m/s
ϕ	34,6°	R	100 m
Força		θ	0°
F_g	-2455 N	Moto	
F_{grx}	0 N	k_A	0,35 kg/m
F_{gry}	-2455 N	C_R	0,02
N_{rd}	1014 N	Controle	
N_{rt}	1441 N	α	0,34
F_{pro}	286 N	β_d	0
$F_{frn,d}$	0 N	β_t	0
$F_{frn,t}$	0 N	Percentual	
F_{aer}	-237 N	$u_{ad,d}$	1,00
F_{rol}	-49 N	$u_{ad,t}$	0,81
F_{ine}	0 N	$u_{no,d}$	0,14
$F_{cen,d}$	811 N	$u_{no,t}$	-0,13
$F_{cen,t}$	884 N	Potência	
$ F_{at,d} $	811 N	\dot{P}_{pro}	7457 W
$ F_{at,t} $	929 N		
$ F_{disp,d} $	811 N		
$ F_{disp,t} $	1153 N		
$N_{est,d}$	1175 N		
$N_{est,t}$	1280 N		

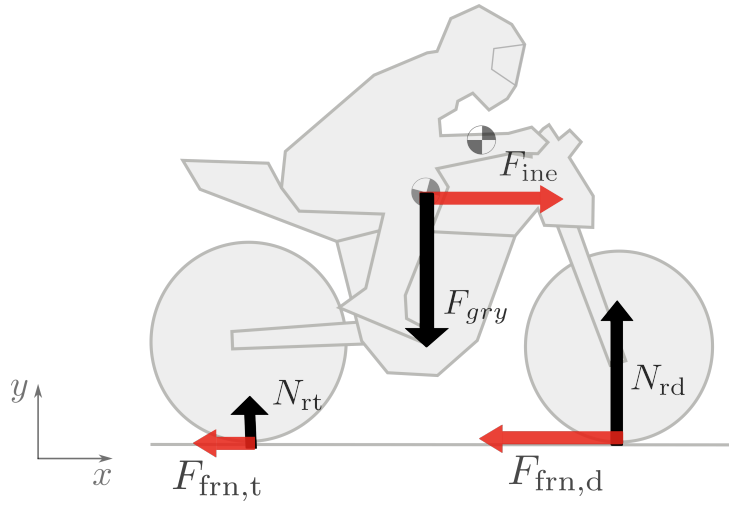


Figura 16: Forças na parada completa

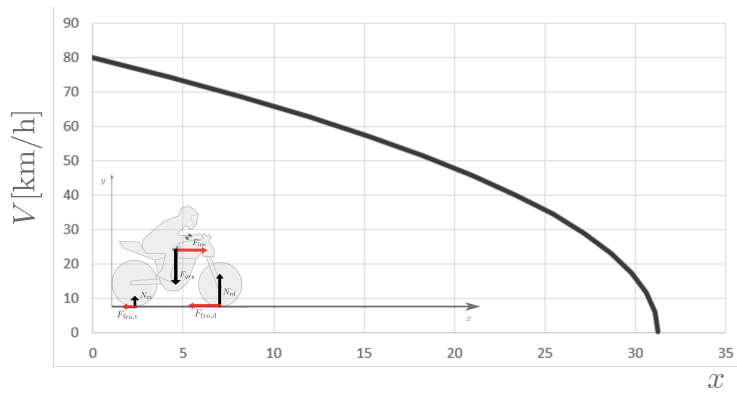


Figura 17: Evolução da velocidade durante a parada completa

Tabela 11: Distância até parada completa

Par/res	Valor	Par/res	Valor
Cinemática		Pista	
V	80 a 0 km/h	μ	0,8
a	-7,9 m/s^2	W	0 m/s
Δx	31,4 m	R	∞ m
Força		θ	0°
F_g	-2455 N	Moto	
F_{grx}	0 N	k_A	0 kg/m
F_{gry}	-2455 N	C_R	0
N_{rd}	2185 N	Controle	
N_{rt}	270 N	α	0
F_{pro}	0 N	β_d	1
$F_{frn,d}$	-1748 N	β_t	1
$F_{frn,t}$	-216 N	Percentual	
F_{aer}	0 N	$u_{ad,d}$	1
F_{rol}	0 N	$u_{ad,t}$	1
F_{ine}	2013 N	$u_{no,d}$	-0,86
$F_{cen,d}$	0 N	$u_{no,t}$	0,79
$F_{cen,t}$	0 N	Potência	
$ F_{at,d} $	1748 N	\dot{P}_{pro}	0 W
$ F_{at,t} $	216 N		
$ F_{disp,d} $	1748 N		
$ F_{disp,t} $	216 N		
$N_{est,d}$	1175 N		
$N_{est,t}$	1280 N		

12 Frenagem até a Parada Completa

Vamos agora estudar um caso específico da *equação geral na forma diferencial* (Equação 24) que pode ser resolvido com certa facilidade. Olhando para a moto da Figura 16, vemos que nessa moto eliminamos a resistência aerodinâmica, à rolagem e gravitacional³⁸. A equação diferencial se torna:

$$m_c \frac{dV}{dt} = m_c a = \sum F_i = 0 + F_{\text{frn,d}} + F_{\text{frn,t}} + 0 + 0 + 0 \quad (52)$$

Para esse caso específico, a aceleração é constante³⁹, dada por:

$$a = \frac{F_{\text{frn,d}} + F_{\text{frn,t}}}{m_c} = \text{cte} \quad (53)$$

Sabemos que

$$\frac{dV}{dt} = a \quad (54)$$

Então, integrando entre a velocidade inicial V_{ini} e a velocidade final 0, temos:

$$0 = V_{\text{ini}} + a\Delta t \quad (55)$$

Que, integrada mais uma vez, resulta no espaço percorrido:

$$\Delta x = V_{\text{ini}}\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2 \quad (56)$$

Isolando Δt na Equação 55 chegamos a:

$$\Delta t = -\frac{V_{\text{ini}}}{a} \quad (57)$$

Que, substituída na equação 56, resulta em:

$$\Delta x = -\frac{V_{\text{ini}}^2}{2a} \quad (58)$$

ou

³⁷Caso um dos outros índices de utilização seja maior do que 1, o maior deles deve ser feito igual à 1, pois naquela condição, ele é o limite físico da moto.

³⁸Para efeitos da solução, poderíamos ter mantido também a resistência à rolagem e a resistência gravitacional, já que também são constantes. Para isso, bastariam pequenas modificações nas equações desta seção. Os termos de propulsão e de arrasto aerodinâmico, por outro lado, trazem complicações na solução da EDO, já que não são constantes.

³⁹Negativa neste caso, pois as forças de frenagem são negativas

$$\Delta x = -\frac{m_c V_{\text{ini}}^2}{2(F_{\text{frn,d}} + F_{\text{frn,t}})} \quad (59)$$

Considerando o caso em que $\beta_d = \beta_t$ alcançamos:

$$\Delta x = -\frac{V_{\text{ini}}^2}{2\beta\mu g} \quad (60)$$

Exemplo 11 Neste último exemplo queremos determinar qual a distância mínima ($\beta_d = \beta_t = 1$) para uma moto reduzir a sua velocidade de 80 a 0 km/h (dados e resultados na Tabela 11). Pela Equação 60 calculamos que essa moto precisa de 31,4 m. A Figura 17 mostra a evolução da velocidade durante a frenagem. Podemos ver que a moto não levanta a roda traseira, já que $u_{no,t} = 0,79$

13 Atividades

Terminada a apresentação, agora chegou a hora do estudo para absorver o material. Depois de ter estudado as definições, as deduções matemáticas e as discussões físicas desta aula, vocês podem agora implementar um algoritmo para reproduzir as tabelas apresentadas. Depois, é hora de usar esse algoritmo para estudar a influência dos parâmetros (geométricos, cinemáticos, da moto e da pista) nas condições limites (empinamento, aceleração, velocidade máxima, *babalu*, perda de aderência em retas e curvas). As dificuldades, resultados e análises desses estudos serão discutidos na próxima aula.

Depois da consolidação do assunto apresentado aqui, iremos estudar como resolver a equação diferencial ordinária (Equação 24) usando métodos numéricos, o que nos permitirá analisar trajetórias bem mais detalhadas. Para isso, é importante que vocês revisem a solução analítica das seguintes equações (onde P , F , a , b , c e e são constantes):

$$\frac{dV}{dt} = F \quad (61)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{P}{V} \quad (62)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{P}{V} + F \quad (63)$$

Para terminar, deem uma olhada no artigo de Magnani e Cunha, 2017. Com o assunto estudado aqui, vocês poderão refazer o estudo do artigo,

como os erros causados por certas aproximações nos modelos, a influência da técnica de frenagem do piloto⁴⁰, e o movimento geral de tomada de curva, que inclui a frenagem na reta anterior e a curva propriamente dita.

Referências

- Baird, Stuart. *Performance Cycling: A Scientific Way to Get the Most Out of Your Bike*. 2010.
- Bradley, John. *The Racing Motorcycle : a Technical Guide for Constructors*. Broadland Leisure Publications, 1996.
- Cocco, Gaetano. *Motorcycle Design and Technology*. Giorgio Nada Editore, 2013.
- Cossalter, Vittore. *Motorcycle Dynamics*. LULU, 2006.
- Foale, Tony. *Motorcycle Handling and Chassis Design: the Art and Science*. 2006.
- Jazar, Reza N. “Vehicle Dynamics Theory and Application”. Em: (2014).
- Magnani, Fábio e Cunha, Saulo. “Estudo da Dinâmica das Motocicletas em Frenagens e Curvas: o Efeito da Técnica do Piloto e da Condição da Estrada”. Em: *Revista Brasileira de Ensino de Física* 39 (2017).
- Magnani, Fábio, de Andrade, Guilherme e Willmersdorf, Ramiro. “Influence of Mathematical Simplifications on the Dynamic and Energetic Performance of an Engine/Motorcycle Integrated Model”. Em: *International Journal of Mechanical Engineering Education* 46.2 (2017).
- Tanelli, Mara, Corno, Matteo e Saveresi, Sergio. *Modelling, Simulation and Control of Two-Wheeled Vehicles*. 1st. Wiley, 2014.
- Wilson, David Gordon. *Bicycling Science*. 3rd. The MIT Press, 2004.

⁴⁰O uso diferente do freio traseiro e do dianteiro