

Universidade Federal de Pernambuco  
Centro de Tecnologia e Geociências  
Departamento de Engenharia Mecânica

## **O PILOTO DA MOTO**

Fábio Magnani

# Conteúdo

1	Introdução . . . . .	3
2	Modelo da Moto e da Pista . . . . .	5
2.1	Modelo da Moto . . . . .	6
2.2	Modelo da Pista . . . . .	14
3	Modelo do Piloto . . . . .	15
3.1	Controle de Velocidade . . . . .	17
3.2	Controle de Utilização . . . . .	24
3.3	Curvas . . . . .	26
3.4	Controle Antecipado . . . . .	32
4	Solução Computacional . . . . .	39
5	Conclusão . . . . .	42
	Apêndice - Variáveis e Funções . . . . .	47

# 1 Introdução

Esta é a sexta apostila do curso de *Engenharia da Motocicleta*<sup>1</sup>. Na primeira apostila, *Visões das Motocicletas*, falamos bastante sobre o motoqueiro e o uso das motos, de vários pontos de vista diferentes. Depois, nas outras apostilas, nossa atenção foi voltada para a motocicleta, e quase sempre do ponto de vista físico (*Física Básica das Motos*), computacional (*Solução Computacional do Movimento das Motos*), descritivo (*A Moto por Dentro*) e termodinâmico (*O Motor da Moto*). Hoje vamos olhar para o motoqueiro, em particular do ponto de vista do sistema de controle da moto. Em outras palavras, hoje o piloto da moto será visto como o agente que mantém (ou tenta manter) a moto na velocidade desejada enquanto impede (ou tenta impedir) manobras indesejadas. A Figura 1 representa a mudança de ponto de vista das apostilas anteriores para esta. Enquanto antes estávamos preocupados principalmente com a moto, agora estamos preocupados principalmente com o motoqueiro. Este reencontro era inevitável, pois, afinal, o piloto e a moto formam um conjunto indissociável. O piloto não é apenas um passageiro da moto, é também o sistema de controle e parte importante da dinâmica (já que o seu corpo influencia a massa, o centro de gravidade e o arrasto aerodinâmico do conjunto).

Um trabalho interessante, que pode ajudar no que será visto hoje, é *Estudo da Dinâmica das Motocicletas em Frenagens e Curvas: o Efeito da Técnica do Piloto e da Condição da Estrada* de Magnani e Cunha (2017),

---

<sup>1</sup>*Engenharia da Motocicleta* é uma disciplina de 60h ministrada no Curso de Graduação em Engenharia Mecânica da UFPE desde 2010. O material também é utilizado na disciplina *Propulsão de Bicicletas e Motocicletas* no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da mesma universidade.

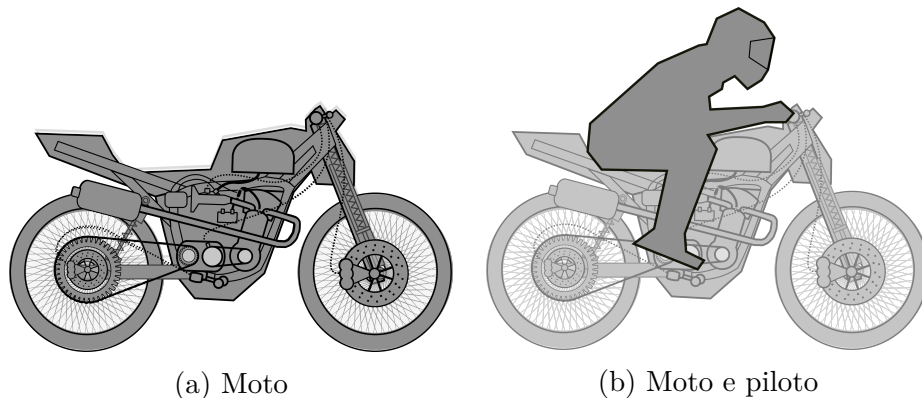


Figura 1: Piloto: o controle da moto.

que tem um interesse particular na frenagem antes da entrada das curvas<sup>2</sup>. No mais, recomendo os livros que já foram citados nas outras apostilas, por serem a base usada para a física das motos neste material: *Motorcycle Dynamics* de Cossalter (2006), *The Racing Motorcycle: a Technical Guide for Constructors* de Bradley (1996), e *Motorcycle Design and Technology* de Cocco (2013). Para avançar nos estudos, principalmente para modelar de forma mais completa o sistema de controle, recomendo *Modelling, Simulation and Control of Two-Wheeled Vehicles* de Tanelli, Corno e Saveresi (2014).

Nas apostilas anteriores, o piloto já atuava de certa forma. Por exemplo, o modelo matemático do piloto mudava automaticamente a marcha e acionava a embreagem (ver a Seção 4.2 de *A Moto por Dentro*). Ainda, desde a segunda apostila (ver Seção 2 de *Física Básica das Motos*), o piloto já era considerado quando podíamos modificar o uso do acelerador ( $\alpha$ ) e dos freios ( $\beta_t$  e  $\beta_d$ ).

Hoje vamos aprimorar a atuação do piloto. Na Seção 2 faremos uma breve revisão do modelo matemático visto até aqui. Depois vem a parte de controle, que é o que nos interessa. Na Seção 3.1, o piloto irá controlar o acelerador e o freio para tentar (desde que a potência do motor e do freio sejam suficientes) acompanhar uma certa curva de velocidade desejada. Veremos que esse controle é incompleto, pois muitas vezes leva a moto a realizar manobras indesejadas<sup>3</sup>. Para resolver, na Seção 3.2 iremos estender o modelo,

<sup>2</sup>A modelagem matemática desse artigo citado acima é mais simples que a apresentada aqui, mas a análise do fenômeno da frenagem é mais detalhada.

<sup>3</sup>As manobras indesejadas aqui consideradas são: perda de aderência na roda traseira e dianteira (pode ser causada por acelerar forte demais, por frear forte demais, ou por fazer curvas rápido demais), empinar a roda dianteira durante acelerações, e levantar a roda traseira durante frenagens.

incluindo agora um modelo secundário que vai ajustar o acelerador e o freio caso alguma manobra indesejada seja detectada.

Até aquele momento, todos os controles serão instantâneos, quer dizer, serão decisões tomadas instante a instante pelo piloto. O problema é que algumas manobras têm que ser decididas com antecedência, como o caso da entrada nas curvas. O piloto tem que saber que há uma curva mais adiante e já reduzir a velocidade. Para tanto, na Seção 3.4 vamos propor um modelo de controle antecipado, que vai forçar o piloto a iniciar a frenagem antes do início da curva.

Ao contrário das outras apostilas, nesta preferimos introduzir o estudo de casos conjuntamente com a apresentação da teoria. Se o leitor quiser refazer as simulações conforme for lendo, recomendo que dê uma rápida lida na Seção 4 para compreender como os listagens são organizadas. Por falar nisso, a Seção 4 é dedicada a comentar alguns detalhes da solução computacional do modelo matemático desenvolvido até aqui. Lembro que, para a compreensão do modelo computacional, não é suficiente apenas a leitura daquela seção. É esperado que, após a leitura do breve texto, o leitor estude o código computacional, reproduza os estudos aqui apresentados, e realize seus próprios estudos.

Finalmente, na Seção 5 apresentamos um guia para atividades futuras. No Apêndice são apresentadas várias tabelas com a estrutura dos programas, incluindo a estrutura principal de dados (Tabelas 2 e 3), as várias funções externas (Tabela 4), a estrutura do programa principal (Tabela 5) e a organização da função principal de simulação, a *Função S()*, na Tabela 6.

## 2 Modelo da Moto e da Pista

A presente seção pode ser vista como um breve resumo das apostilas anteriores, na qual iremos organizar e ressaltar apenas as equações principais, sem a preocupação em explicá-las ou deduzi-las - o nosso objetivo nesta seção é apenas ter uma referência para a leitura da seção seguinte. Caso o leitor não esteja lendo este texto logo após ter estudado o material passado, recomenda-se fortemente que revise as outras apostilas e refaça os estudos nelas apresentados. O conjunto das apostilas forma um grande modelo físico, matemático e computacional, do motor, da motocicleta e do piloto, que só pode ser compreendido quando visto como um modelo único.

## 2.1 Modelo da Moto

O modelo matemático da moto (apresentado em *Física Básica das Motos* e resolvido computacionalmente em *Solução Computacional do Movimento das Motos*) é basicamente a aplicação da Segunda Lei de Newton (*i.e.*,  $F = ma$ ).

### Forças Estáticas

Algumas forças resistivas não dependem da aceleração,  $a$ ; do uso do acelerador,  $\alpha$ ; e do uso dos freios,  $\beta_t$  e  $\beta_d$ . São elas: a componente da força de gravidade na direção do movimento (que dificulta o movimento no caso de subida e ajuda na descida),  $F_{grx}$ ; a componente da gravidade na direção perpendicular ao movimento (que influencia as normais, e consequentemente a força de atrito disponível para propulsão, frenagem e curvas),  $F_{gry}$ ; a força de arrasto aerodinâmico,  $F_{aer}$ ; e a força de resistência à rolagem (associada à deformação do pneu e da suspensão),  $F_{rol}$ . Essas forças, bem como as revisadas na próxima seção, são representadas na Figura 2.

$$F_{grx} = -m_c g \sin\theta \quad (1)$$

$$F_{gry} = -m_c g \cos\theta \quad (2)$$

$$F_{aer} = -k_A (V - W)^2 \quad (3)$$

$$F_{rol} = -C_R m_c g \cos\theta \quad (4)$$

A motocicleta<sup>4</sup>, do ponto de vista do movimento longitudinal, é caracterizada por seu fator de arrasto,  $k_A$  ( $= 1/2\rho C_D A$ ), pelo seu coeficiente de resistência à rolagem,  $C_R$ , e pela sua massa combinada,  $m_c$  ( $= m_m + m_p$ ).

### Forças Dinâmicas

As outras forças dependem da aceleração, do uso do acelerador e do freio. A força de inércia é dada por:

$$F_{ine} = m_c a \quad (5)$$

A força de propulsão na roda é expressa como um percentual da força máxima disponível, sendo que esse percentual,  $\alpha$ , é chamado de uso do acelerador. Lembrando que  $P = FV$ :

---

<sup>4</sup>Esses parâmetros não são da moto (veículo) apenas, mas do conjunto moto/piloto, uma vez que o arrasto aerodinâmico e a massa do conjunto, ambos, dependem do tamanho e da massa tanto da motocicleta quanto do motoqueiro.

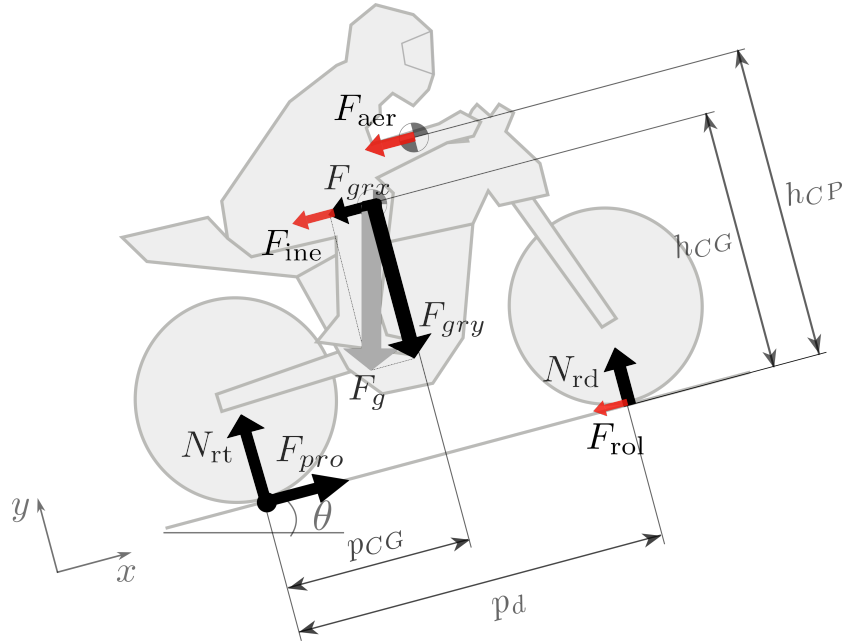


Figura 2: Moto em movimento, aclave de 15°

$$F_{pro} = \frac{P_{pro}}{V} = \frac{\alpha P_{pro,max}}{V} \quad (6)$$

A relação entre a potência no motor e a potência de propulsão na roda é dada pela eficiência de transmissão,  $\eta_t$ :

$$P_{pro} = \alpha P_{pro,max} = \alpha \eta_t P_{motor,max} \quad (7)$$

A curva de potência máxima do motor, conforme mostrado na Figura 3 e na Equação 8, pode ser ajustada para passar pelo ponto de pico de potência e de torque<sup>5</sup>.

$$P_{motor,max} = a_1 + a_2 \omega_{motor} + a_3 \omega_{motor}^2 + a_4 \omega_{motor}^3 \quad (8)$$

As forças de frenagem são dadas pela proporção do uso da força de atrito disponível (força normal vezes o coeficiente de atrito):

$$F_{frn,d} = \beta_d \mu N_{rd} \quad (9)$$

$$F_{frn,t} = \beta_t \mu N_{rt} \quad (10)$$

<sup>5</sup>Sobre as curvas do motor, ver a Seção 4.1 de *A Moto por Dentro*.

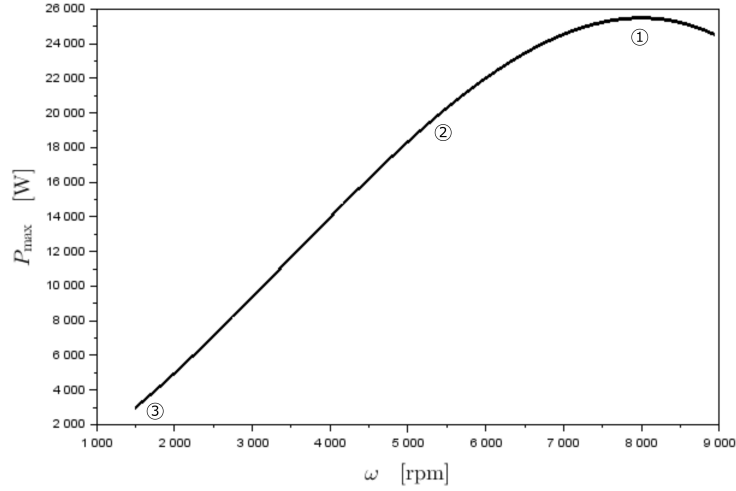


Figura 3: Curva de potência do motor. (1)  $P_{\text{pico}}$  e  $\omega_{\text{motor},P_{\text{pico}}}$ , (2)  $\omega_{\text{motor},T_{\text{pico}}}$ , e (3)  $P_{\text{corte,min}}$  e  $\omega_{\text{motor,corte,min}}$ .

Onde as normais são obtidas a partir do balanço de momentos em relação ao ponto de contato do pneu traseiro com o piso e do balanço de forças na direção perpendicular ao movimento da moto:

$$N_{rt} = m_c g \cos\theta \left( 1 - \frac{p_{CG}}{p_d} \right) + \frac{m_c a h_{CG} + k_A (V - W)^2 h_{CP} + m_c g \sin\theta h_{CG}}{p_d} \quad (11)$$

$$N_{rd} = m_c g \cos\theta \frac{p_{CG}}{p_d} - \frac{m_c a h_{CG} + k_A (V - W)^2 h_{CP} + m_c g \sin\theta h_{CG}}{p_d} \quad (12)$$

### Aceleração

A equação geral do movimento da moto (Segunda Lei de Newton) é dada por:

$$m_c \frac{dV}{dt} = -F_{\text{ine}} = F_{\text{pro}} + F_{\text{frn,t}} + F_{\text{frn,d}} + F_{\text{aer}} + F_{\text{rol}} + F_{\text{grx}} \quad (13)$$

Que, usando as equações anteriores, pode ser escrita como:



$$a = \frac{dV}{dt} = \left[ \frac{\alpha P_{\text{pro,max}}}{V} + F_{\text{aer}} + F_{\text{rol}} + F_{\text{grx}} + \beta_t \mu F_{\text{gry}} + \right. \\ \left. (\beta_d - \beta_t) \mu \left( -\frac{F_{\text{aer}} h_{\text{CP}}}{p_d} - \frac{F_{\text{grx}} h_{\text{CG}}}{p_d} + \frac{F_{\text{gry}} p_{\text{CG}}}{p_d} \right) \right] / \quad (14) \\ \left\{ m_c \left[ 1 - (\beta_d - \beta_t) \mu \frac{h_{\text{CG}}}{p_d} \right] \right\}$$

Ou como:

$$a = \frac{dV}{dt} = \left\{ \frac{\alpha P_{\text{max}}}{V} - k_A (V - W)^2 - C_R m_c g \cos\theta - m_c g \sin\theta - \beta_t \mu m_c g \cos\theta + \right. \\ \left. (\beta_d - \beta_t) \mu \frac{k_A (V - W)^2 h_{\text{CP}} + m_c g \sin\theta h_{\text{CG}} - m_c g \cos\theta p_{\text{CG}}}{p_d} \right\} / \\ \left\{ m_c \left[ 1 - (\beta_d - \beta_t) \mu \frac{h_{\text{CG}}}{p_d} \right] \right\} \quad (15)$$

Como já comentado muitas vezes pelas outras apostilas, pela Equação 15 é possível ver que, se queremos que uma moto acelere mais ou tenha maior velocidade máxima, podemos diminuir as resistências (diminuindo  $m_c$ ,  $k_A$  e  $C_R$  nas Equações 1-4) ou aumentar a potência do motor  $P_{\text{motor,max}}$  (Equação 8). Em outras palavras, para acelerar mais e ter maior velocidade, podemos fazer as seguintes mudanças no projeto<sup>6,7</sup>:

- Moto
  - mais leve
  - menor arrasto aerodinâmico
  - menores perdas nos pneus e na suspensão,
  - maior eficiência de transmissão

---

<sup>6</sup>Algumas dessas mudanças propostas não são feitas em todas as motos porque aumentam o preço da moto, ou são tecnicamente difíceis, ou diminuem a durabilidade da moto.

<sup>7</sup>As mudanças que diminuem as resistências, externas (*e.g.*, arrasto aerodinâmico, resistência à rolagem, massa do conjunto) ou internas (*i.e.*, eficiência volumétrica, do motor e de transmissão), são as preferíveis, pois melhoram a performance sem aumentar o consumo de combustível. Fábricas que não sabem fazê-las preferem simplesmente aumentar o tamanho do motor, que é algo bastante fácil, ou aumentar a rotação, que é algo um pouco menos fácil, ambas modificações que aumentam o consumo.

- Motor
  - maior eficiência volumétrica
  - maior eficiência do motor
  - menor temperatura na aspiração
  - maior rotação
  - maior volume deslocado
- Combustível
  - maior massa por volume de ar
  - maior poder calorífico
  - maior velocidade de queima
- Ambiente
  - maior pressão
  - menor temperatura

A Equação 15 pode ser simplificada para o caso com  $\beta = \beta_d = \beta_a$ , resultando em:

$$a = \frac{\alpha P_{\max}}{m_c V} - \frac{k_A (V - W)^2 + C_R m_c g \cos \theta}{m_c} - \frac{m_c g \sin \theta}{m_c} - \frac{\beta \mu m_c g \cos \theta}{m_c} \quad (16)$$

Nesta forma, é mais fácil reconhecer como o motoqueiro controla a aceleração da moto através de  $\alpha$  no primeiro termo após o sinal de igualdade (modulando a potência do motor), e  $\beta$  no último termo (modulando a força de frenagem). O segundo termo é relativo às resistências aerodinâmica e de rolagem (que tentam desacelerar a moto), e o terceiro termo é a ação da gravidade na direção do movimento (acelera a moto nos declives e desacelera nos acíves).

Praticamente todos os exemplos estudados nesta apostila usaram os dados apresentados nas várias tabelas do apêndice da apostila *O Motor da Moto*.

A Figura 4 mostra a solução da equação diferencial 15 usando um piloto bastante simples, que nunca freia ( $\beta_d = \beta_a = 0$ ) e que usa o acelerador com uma proporção sempre constante ( $\alpha = 1,0$  na Curva 1,  $\alpha = 0,7$  na Curva 2, e  $\alpha = 0,3$  na Curva 3). Observa-se claramente, como esperado e como já visto, que quanto menor o uso do acelerador, menor tanto a aceleração quanto a velocidade máxima da moto durante o percurso. A Figura 5 mostra

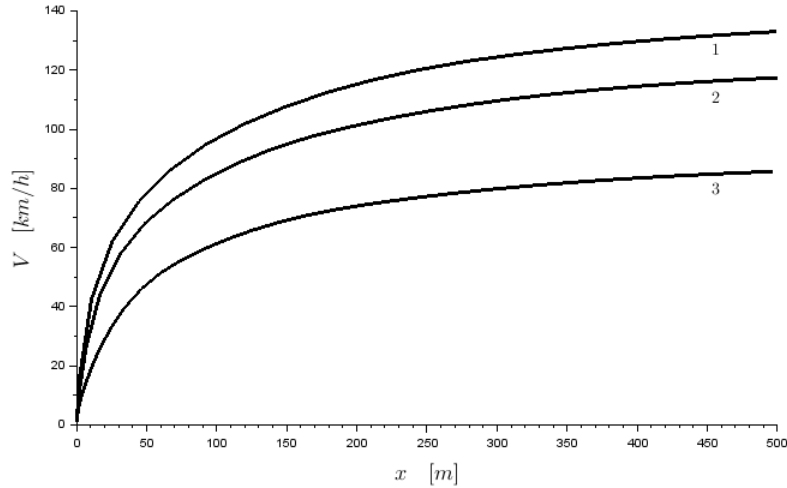


Figura 4: Solução da equação diferencial para o caso sem freio ( $\beta_d = \beta_d = 0$ ) e com uso de acelerador com percentual constante: (1)  $\alpha = 1,0$ , (2)  $\alpha = 0,7$ , e (3)  $\alpha = 0,3$ .

a evolução da rotação do motor para o caso da Curva 1 da Figura 4. Vê-se, conforme já comentado, como o piloto no modelo matemático desenvolvido até aqui já tinha a capacidade de acelerar e frear (com percentuais definidos previamente), e de mudar de marcha conforme a necessidade.

A Figura 6 mostra o caso em que a moto parte de uma velocidade alta e freia completamente enquanto mantém o acelerador fechado ( $\alpha = 0$ ). Na Curva 1 o motoqueiro usa os dois freios ( $\beta_d = \beta_d = 1$ ), na Curva 2 usa apenas o freio dianteiro ( $\beta_d = 1$  e  $\beta_d = 0$ ), e na Curva 3 apenas o freio traseiro ( $\beta_d = 0$  e  $\beta_d = 1$ ). Como já comentado várias vezes nas apostilas passadas, o freio dianteiro freia melhor porque durante a desaceleração há uma transferência de peso para a roda dianteira, aumentando a sua normal e, conseqüentemente, o atrito disponível.

### Forças Centrípetas

Os dois exemplos mostrados até agora foram feitos em retas, mas queremos um modelo que preveja o movimento da moto nas curvas também. Para tanto, precisamos calcular a força centrípeta:

$$F_{cen} = \frac{m_c V^2}{R} \quad (17)$$

Vamos decompor a força centrípeta para as duas rodas, considerando que

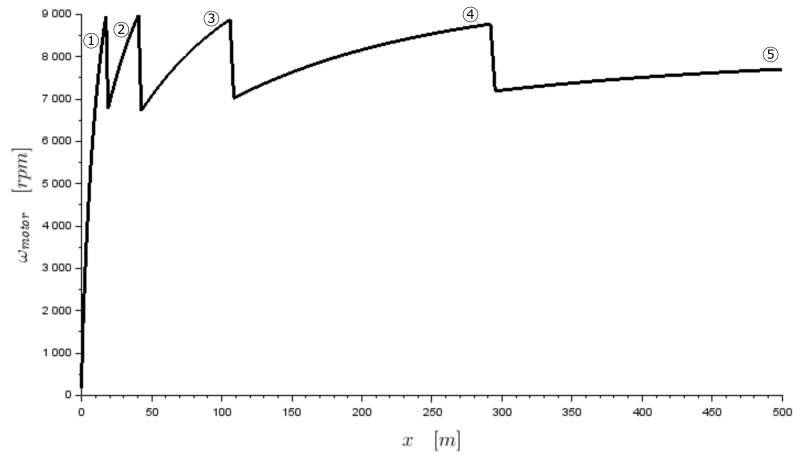


Figura 5: Variação da rotação do motor para o caso sem freio ( $\beta_d = \beta_a = 0$ ) e com uso de acelerador constante e máximo,  $\alpha = 1,0$ . Curva de rotação associada ao movimento descrito na Curva 1 da Figura 4. Os números sobre as curvas representam as marchas escolhidas em cada trecho do trajeto.

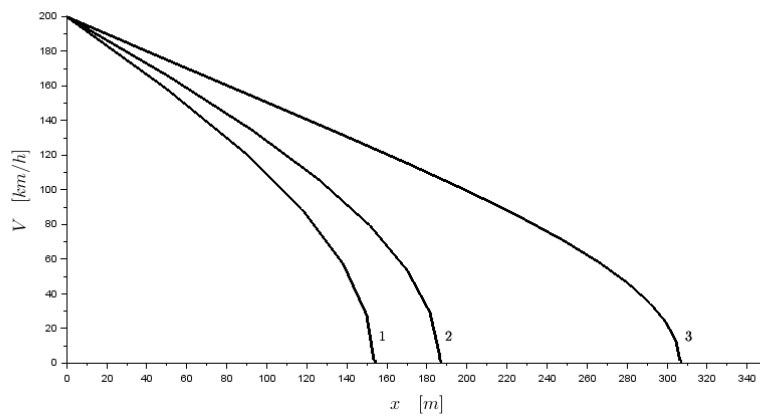


Figura 6: Solução da equação diferencial para o caso sem acelerador ( $\alpha = 0$ ) e com uso de freio com percentual constante: (1) uso dos dois freios,  $\beta_d = \beta_a = 1$ , (2) apenas o freio dianteiro,  $\beta_d = 1$  e  $\beta_a = 0$ , e (3) apenas o freio traseiro,  $\beta_d = 0$  e  $\beta_a = 1$

a distribuição da força é dada em função da distância do centro de gravidade em relação à roda:

$$F_{\text{cen,d}} = \frac{m_c V^2}{R_{\text{curv}}} \left( \frac{p_{\text{CG}}}{p_d} \right) \quad (18)$$

$$F_{\text{cen,t}} = \frac{m_c V^2}{R_{\text{curv}}} \left( 1 - \frac{p_{\text{CG}}}{p_d} \right) \quad (19)$$

As Equações 18 e 19 calculam a força de atrito necessária nas rodas para que a moto consiga realizar uma curva de raio  $R_{\text{curv}}$  com velocidade  $V$ .

### Forças de Atrito

O atrito nas rodas é usado para o movimento longitudinal (*i.e.*, força de propulsão e de frenagem) e também para manter a moto com o movimento curvilíneo (*i.e.*, força centrípeta):

$$|F_{\text{at,d}}| = \sqrt{F_{\text{frn,d}}^2 + F_{\text{cen,d}}^2} \quad (20)$$

$$|F_{\text{at,t}}| = \sqrt{(F_{\text{pro}} + F_{\text{frn,t}})^2 + F_{\text{cen,t}}^2} \quad (21)$$

Essas duas forças são necessárias para o movimento desejado da moto. É importante saber, no entanto, se há atrito disponível para tanto.

### Forças Disponíveis

Cossalter, em *Motorcycle Dynamics*, mostra como o atrito do pneu varia com as várias condições de operação da moto. Nesta apostila, usaremos um modelo simplificado, no qual a força de atrito disponível é proporcional à normal na superfície:

$$F_{\text{disp,d}} = \mu N_{rd} \quad (22)$$

$$F_{\text{disp,t}} = \mu N_{rt} \quad (23)$$

Vamos agora calcular duas normais (aproximadas) que serão usadas simplesmente como valores de normalização para os índices de utilização da próxima seção. No caso estático, sem aceleração e sem velocidade, e desprezando o efeito de  $\sin\theta$ , as Equações 11 e 12 transformam-se em:

$$N_{\text{est,d}} = -F_{\text{gy}} \frac{p_{\text{CG}}}{p_d} \quad (24)$$

$$N_{\text{est},t} = -F_{\text{gry}} \left( 1 - \frac{p_{\text{CG}}}{p_d} \right) \quad (25)$$

### Índices de Utilização

As manobras indesejadas ocorrem quando não há atrito suficiente nas rodas dianteira ou traseira, o que pode ser monitorado pelos índices de utilização da aderência:

$$u_{ad,d} = \frac{|F_{\text{at},d}|}{|F_{\text{disp},d}|} \quad (26)$$

$$u_{ad,t} = \frac{|F_{\text{at},t}|}{|F_{\text{disp},t}|} \quad (27)$$

Ou quando uma das normais tem valor nulo ou negativo<sup>8</sup>, pois nessas condições uma das rodas estaria levantada. O levantamento das rodas pode ser monitorado pelos índices de utilização das normais:

$$u_{no,d} = 1 - \frac{N_{rd}}{N_{\text{est},d}} \quad (28)$$

$$u_{no,t} = 1 - \frac{N_{rt}}{N_{\text{est},t}} \quad (29)$$

O que nos interessa em qualquer um desses índices de utilização é quando o seu valor é superior ou igual a 1, pois nesse caso há a ocorrência de uma das manobras indesejadas (perda de aderência ou levantamento da roda). Quando o valor for inferior a 1 (valores negativos são possíveis também), a moto está rodando sem problemas.

## 2.2 Modelo da Pista

A pista já vem sendo modelada desde a apostila *Física Básica das Motos* em forma de parâmetros locais e da apostila *Solução Computacional do Movimento das Motos* na forma de funções. De forma geral, precisamos apenas

---

<sup>8</sup>O modelo desenvolvido considera que a roda está sempre em contato com o piso. Então, quando a moto está em situação de levantar uma das rodas, o modelo "imagina" que precisa de uma normal negativa para manter a roda no chão. Claramente isso não é físico, pois não há nada que prenda a roda da moto no chão. No entanto, podemos usar essa condição, de normal negativa, para monitorar as condições em que a moto estaria com uma das rodas levantadas.

especificar como a velocidade do vento,  $W$ , o aclave da pista,  $\theta_{pista}$ , o coeficiente de atrito,  $\mu$ , e o raio de curvatura,  $R_{curv}$ , variam com a posição:

$$W = f(x) \quad (30)$$

$$\theta_{pista} = f(x) \quad (31)$$

$$\mu = f(x) \quad (32)$$

$$R_{curv} = f(x) \quad (33)$$

Com a especificação correta dessas funções como dados de entrada, podemos simular a moto em uma pista de corrida com curvas diversas, subidas e descidas, lufadas de vento e até manchas de óleo ou trechos molhados. Para os exemplos desta apostila, para facilitar a análise<sup>9</sup>, vamos usar uma pista plana horizontal, sem vento, e com coeficiente de atrito constante.

Adicionalmente, a pista tem a seguinte sequencia de curvas:

$$R_{curv} = \begin{cases} R_{tre,1} & \text{para } x < L_{tre,1} \\ R_{tre,2} & \text{para } L_{tre,1} \leq x < (L_{tre,1} + L_{tre,2}) \\ R_{tre,3} & \text{para } x \geq (L_{tre,1} + L_{tre,2}) \end{cases} \quad (34)$$

Quer dizer, a nossa pista tem três trechos, com comprimentos e raios de curvatura distintos (isso pode ser facilmente modificado na solução computacional). A Figura 7 mostra uma representação gráfica da Equação 34.

A Tabela 1 mostra os dados utilizados nos exemplos desta apostila, em adição aos dados que já haviam sido mostrados no apêndice da apostila *O Motor da Moto*. Sempre que esses valores forem usados, diremos que se trata do Caso Base. Nos exemplos em que parâmetros diferentes forem usados, isso será sinalizado no texto ou na figura.

### 3 Modelo do Piloto

Até este momento, estivemos preocupados em organizar e revisar o que já havia sido visto. Passemos então às novidades, que é o modelo do piloto com a capacidade de controlar a moto para manter certa velocidade desejada enquanto evita manobras indesejadas.

---

<sup>9</sup>Fenômenos muito complexos dificultam a análise de como cada parâmetro influencia cada comportamento, por isso muitas vezes é melhor escolher fenômenos mais simples enquanto estudamos os modelos.

Tabela 1: Novos parâmetros da estrutura **sP**

Par	Valor	Descrição
<b>[Parâmetros da simulação]</b>		
$t_{sim}$	30	tempo simulado, s
$V_0$	1	velocidade inicial da moto, m/s
<b>[Características da pista]</b>		
$L_{pista}$	500	comprimento total da pista, m
$L_{tre,1}$	250	comprimento do trecho 1, m
$R_{tre,1}$	$\infty$	raio de curvatura do trecho 1, m
$L_{tre,2}$	50	comprimento do trecho 2, m
$R_{tre,2}$	$\infty$	raio de curvatura do trecho 2, m
$R_{tre,3}$	$\infty$	raio de curvatura do trecho 3, m
<b>[Velocidade desejada]</b>		
$V_{ini,des}$	1/3,6	velocidade inicial desejada, m/s
$L_{Vvar,des}$	200	comprimento de velocidade desejada variável, m
$V_{cruz,des}$	200/3,6	velocidade de cruzeiro desejada, m/s
<b>[Dados de controle]</b>		
$u_{\alpha,max}$	0,95	lim. max. contr. util. acelerador
$u_{\beta,max}$	0,95	lim. max. contr. util. freio
$d_{visao}$	0	distância de visão, m
$\delta_{\alpha}$	0,1	decremento acel. contr. util.
$\delta_{\beta}$	0,1	decremento freio contr. util.
$f_{red,seg}$	0,9	fator de redução na velocidade de segurança



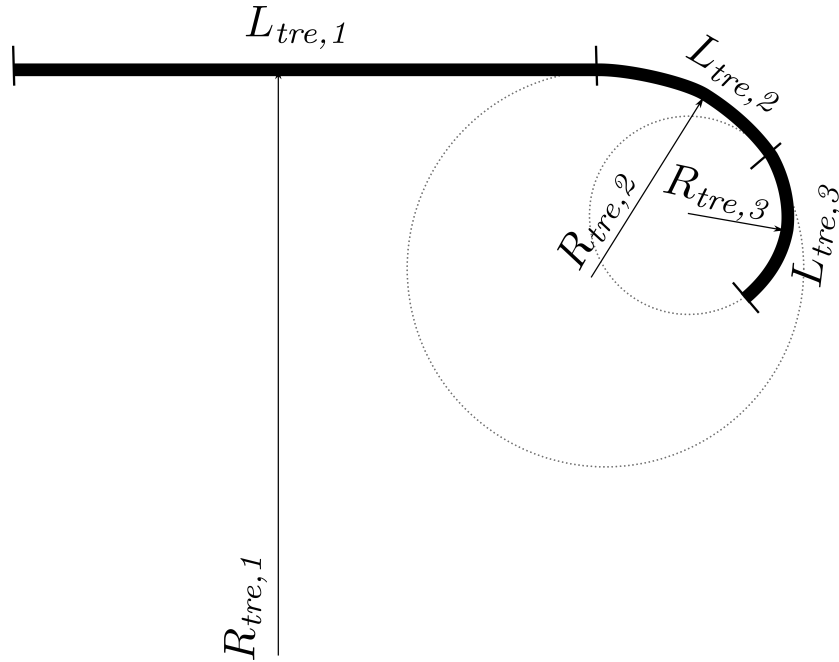


Figura 7: Dimensões da pista.

### 3.1 Controle de Velocidade

A intenção principal do piloto é tentar desenvolver uma certa curva de velocidade desejada, que é especificada como parâmetro de entrada no modelo (o "desejo" do piloto representa tanto as suas preferências pessoais quanto o limite legal de velocidade em cada parte do percurso):

$$V = f(x) \quad (35)$$

Nos nossos exemplos, para facilitar a análise, vamos usar uma distribuição mais simples — uma rampa de velocidade seguida de um trecho de cruzeiro, como descrito algebricamente pela Equação 36 e graficamente pela Figura 8.

$$V_{des} = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{L_{Vvar,des}}\right) V_{ini,des} + \left(\frac{x}{L_{Vvar,des}}\right) V_{cruz,des} & \text{para } x \leq L_{Vvar,des} \\ V_{cruz,des} & \text{para } x > L_{Vvar,des} \end{cases} \quad (36)$$

Com esses parâmetros: velocidade inicial da curva desejada,  $V_{ini,des}$ ; comprimento da parte da curva com velocidade variável,  $L_{Vvar,des}$ ; e velocidade de cruzeiro,  $V_{cruz,des}$ ; podemos simular fenômenos com velocidade constante (basta fazer  $V_{cruz,des}=V_{ini,des}$ ), acelerações máximas (fazendo com que curva

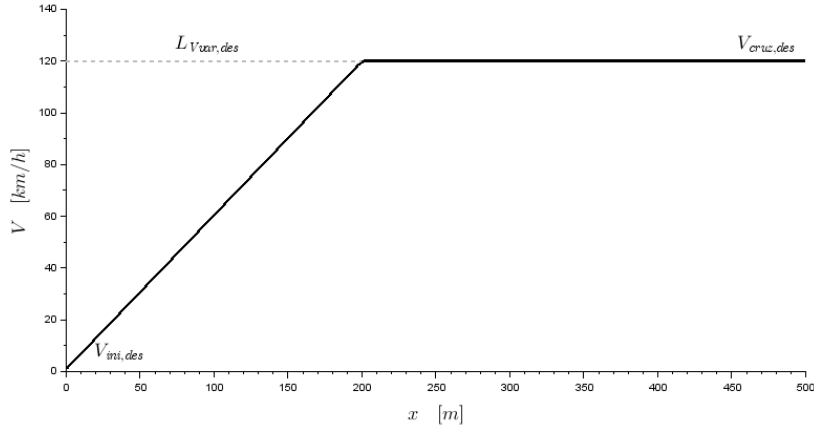


Figura 8: Velocidade desejada.

de velocidade sempre tenha velocidade muito grande) ou frenagens máximas (usando uma curva de velocidade desejada com velocidade bastante baixa).

É muito importante salientar a diferença entre a velocidade inicial desejada  $V_{ini,des}$  (*i.e.*, a velocidade que o motoqueiro gostaria que a moto estivesse no início do movimento) e  $V_0$  (*i.e.*, a velocidade real da moto no instante inicial). Por exemplo, podemos fazer  $V_0 = 0$ <sup>10</sup> e  $V_{ini,des} = 200$ , para simular uma moto parada inicialmente, mas a qual o motoqueiro irá acelerar o máximo para tentar chegar a 200 m/s. Ou então podemos fazer  $V_0 = 200$  e  $V_{ini,des} = 0$ , para uma moto que no instante inicial está muito rápida, mas com o piloto freando o máximo possível para tentar pará-la. As Figuras 4 e 6 foram obtidas assim.

O controle de velocidade é obtido escolhendo os valores de  $\alpha$ ,  $\beta_t$  e  $\beta_d$  de forma a tentar seguir a curva de velocidade desejada. A aceleração desejada para passar da velocidade  $V_x$  para  $V_{des,x + \Delta x}$  é:

$$a_{des} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V_{des,x + \Delta x} - V_x}{\Delta t} \quad (37)$$

onde:

$$\Delta x = V d \Delta t \quad (38)$$

<sup>10</sup>Na verdade, não usaremos  $V_0 = 0$  na solução computacional, pois, por ser numérica, essa solução apresenta problemas computacionais no limite tendendo a zero quando as variáveis estão no denominador. No lugar, vamos usar valores pequenos, *e.g.*,  $V_0 = 1$  ou  $V_{cruz,des} = 1$  m/s, para evitar esse problema. Do ponto de vista quantitativo, a solução encontrada dessa forma é praticamente a mesma.

Importante ressaltar que  $V_x$  não necessariamente é igual a  $V_{des,x}$ , seja porque o motor ou o freio não são potentes o suficiente para comandar o movimento desejado<sup>11</sup>, seja porque o sistema de controle de utilização ou o sistema de controle antecipado (que veremos logo adiante), reduzem o valor de  $\alpha$  e  $\beta$ <sup>12</sup>

A Equação 37 nos dá a velocidade desejada pelo piloto. Para ver como (tentar) alcançá-la, voltemos rapidamente à Equação 15 (ou 16) por alguns instantes. Primeiro, vamos calcular a máxima aceleração possível para aquela situação (de aative, arrasto aerodinâmico, rotação, *etc.*). Para esse caso de aceleração máxima, fazendo  $\alpha = 1, \beta_t = \beta_d = 0$ , temos:

$$a_{max} = \frac{P_{max}}{m_c V} - \frac{k_A (V - W)^2 + C_R m_c g \cos\theta}{m_c} - \frac{m_c g \sin\theta}{m_c} - 0 \quad (39)$$

O primeiro termo à direita do sinal de igualdade representa a ação da propulsão tentando acelerar a moto, o segundo as resistências aerodinâmica e à rolagem, o terceiro a resistência gravitacional (que freia a moto nas subidas e acelera nas decidas), e o quarto a frenagem, que é nula.

Façamos algo parecido, mas agora para calcular o caso de frenagem máxima. Para o caso  $\alpha = 0, \beta_t = \beta_d = 1$ , temos:

$$a_{min} = 0 - \frac{k_A (V - W)^2 + C_R m_c g \cos\theta}{m_c} - \frac{m_c g \sin\theta}{m_c} - \frac{\mu m_c g \cos\theta}{m_c} \quad (40)$$

Na qual o primeiro termo à direita, nulo, é a propulsão, o segundo representa as resistências aerodinâmica e à rolagem, o terceiro termo a ação da gravidade, e o quarto termo a ação do freio. Os valores de  $\alpha_{vel}$ <sup>13</sup> e  $\beta_{vel}$  podem ser calculados comparando  $a_{des}, a_{max}$  e  $a_{min}$ :

$$\alpha_{vel} = \max \left[ \min \left( \frac{a_{des}}{a_{max}}, 1 \right), 0 \right] \quad (41)$$

$$\beta_{t,vel} = \beta_{d,vel} = \max \left[ \min \left( \frac{a_{des}}{a_{min}}, 1 \right), 0 \right] \quad (42)$$

<sup>11</sup>Por exemplo, por mais que o piloto deseje, a moto não vai rodar a 1000 km/h ou frear de 300 km/h a 0 km/h em apenas 1 segundo.

<sup>12</sup>Como nesses nossos exemplos quase sempre usamos  $\beta_t = \beta_d$ , em vários momentos do texto iremos escrever apenas a variável genérica  $\beta$ .

<sup>13</sup>Estamos usando o subscrito 'vel' momentaneamente em  $\alpha$  e  $\beta$  porque por enquanto há apenas o controle de velocidade desejada em nosso modelo. Nos gráficos, no entanto, usaremos desde já as variáveis sem esse subscrito, já que fica claro pela legenda que caso estamos estudando.

$$\beta_{vel} = \beta_{d,vel} = \beta_{t,vel} \quad (43)$$

As funções  $\max()$  e  $\min()$  são usadas para limitar  $\alpha$  e  $\beta$  ao intervalo  $[0,1]$ , garantindo assim que a moto não usará potências maiores que a potência máxima disponível pelo motor e pelo freio. Notem que quase sempre  $a_{max} > 0$ , logo  $\alpha$  será 0 caso o motoqueiro deseje reduzir a velocidade, *i.e.*,  $a_{des} < 0$ . O mesmo raciocínio vale para a frenagem, pois quase sempre  $a_{min} < 0$ . Então,  $\beta$  será igual a 0 se o motoqueiro quiser acelerar a moto, *i.e.*,  $a_{des} > 0$ .

Agora atenção para um caso incomum. O modelo considera apenas situações em que  $a_{min} < 0$  e  $a_{max} > 0$ , que são os casos mais comuns para os parâmetros usuais. Esses valores podem não ocorrer se a potência máxima do motor for muito menor que as resistências (caso em que a moto tentaria ir para trás, pelo nosso modelo) ou quando a força da gravidade for muito maior que as resistências e a frenagem máxima juntas, porque nesse caso os sinais da Equação 42 ficariam trocados e desligariam o freio. Esses casos limites e poucos usuais não serão considerados pela solução computacional. No primeiro caso o problema é da própria dinâmica, porque pelas nossas equações a resistência aerodinâmica e a resistência à rolagem passariam a empurrar a moto para trás<sup>14</sup>. No segundo caso, a questão é de controle, já que o freio simplesmente desliga.

Vamos ver agora como é o comportamento do controle de velocidade. A Figura 9 mostra um caso em que a moto parte da baixa velocidade de 1 m/s ( $V_0$ ). A velocidade desejada é uma reta que vai de 1 ( $V_{ini,des}$ ) a 200 km/h ( $V_{cruz,des}$ ) nos primeiros 200 m ( $L_{Vvar,des}$ ), e depois a velocidade desejada é constante, 200 km/h ( $V_{cruz,des}$ ), durante todo o restante do percurso. Vemos que até aproximadamente 70 m, a velocidade real é igual à velocidade desejada, mas que depois disso a moto não consegue mais acompanhar o desejo do piloto.

Para entendermos esse comportamento da moto, vejamos outros gráficos do mesmo movimento na Figura 10. As próximas figuras com quatro gráficos usarão o mesmo sistema de cores explicados na legenda dessa figura, onde [ES] é o gráfico esquerdo superior, [DS] o direito superior, [EI] o esquerdo inferior, e [DI] o direito inferior. No gráfico [DI], de  $\alpha$  e  $\beta$ , vemos que o motoqueiro nunca freia. O motoqueiro modula o acelerador até 70 m, conseguindo respeitar a velocidade desejada (vemos na Figura 4 que a moto tinha um maior potencial para acelerar, caso o motoqueiro quisesse). Depois dos 70 m, de volta à Figura 10[DI], vemos que o acelerador é usado sempre no

<sup>14</sup>Para simular o caso real, teríamos que mudar o sinal para que as resistências, obviamente, continuassem a resistir a esse movimento, não ajudá-lo. Mas não iremos gastar tempo de processamento com uma condição do tipo *if* que quase nunca acontecerá.

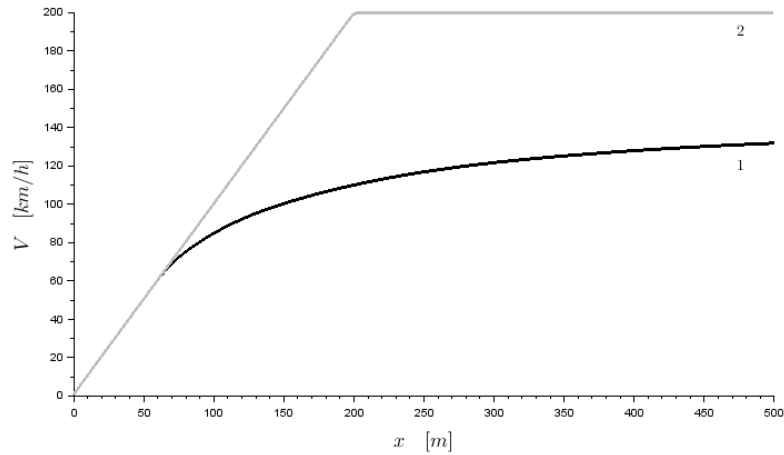


Figura 9: Movimento da moto com velocidade inicial  $V_0=1$  m/s, usando apenas o controle de velocidade: (1) velocidade real,  $V_x$ , (2) velocidade desejada  $V_{des,x}$

máximo, mas mesmo assim o motor não tem potência para vencer as resistências ao movimento e garantir a velocidade desejada. Os outros dois gráficos (*i.e.*, [DS] e [EI]) mostram que não há manobras indesejadas, já que todos os índices de utilização são inferiores a 1. O pior caso foi próximo aos 70 m, quando a moto estava usando aproximadamente 80% ( $u_{ad,t} = 0,8$ ) para tentar alcançar a velocidade desejada. Pelo gráfico da utilização das normais, vê-se que há uma transferência para a roda traseira, como esperado, e pelo gráfico de utilização da aderência, [DS], vê-se que a roda dianteira quase não usa o atrito (já que a moto está acelerando na reta), enquanto o atrito é mais utilizado na traseira, para manter a propulsão. No gráfico de utilização da normal, [EI], observamos a transferência de peso para traseira durante a aceleração.

Vamos ver agora o comportamento do controle de velocidade em outro teste. Na Figura 11, a moto está inicialmente a 200 km/h ( $V_0$ ), enquanto o motoqueiro desejaria estar iniciando uma frenagem mais gradual, dos 140 aos 60 km/h nos primeiros 300m. Nos primeiros 100 m, o motoqueiro não consegue reduzir tanto a velocidade quanto desejaria, mas após isso consegue manter a curva de velocidade desejada.

Examinando o conjunto de gráficos na Figura 12, vemos que o motoqueiro usou totalmente o freio durante os 100 primeiros metros, e depois passou a modular o seu uso para manter a curva de velocidade desejada. Há

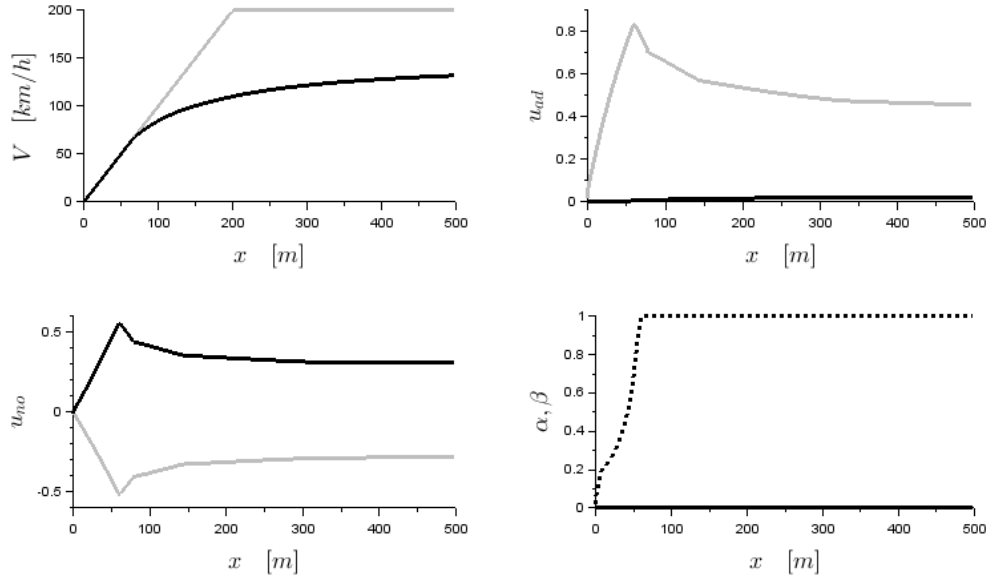


Figura 10: Movimento da moto com velocidade inicial  $V_0=1$  m/s, usando apenas o controle de velocidade. [ES]:  $V$  (preto),  $V_{des}$  (cinza); [DS]:  $u_{ad,d}$  (preto),  $u_{ad,t}$  (cinza); [EI]:  $u_{no,d}$  (preto),  $u_{no,t}$  (cinza); [DI]:  $\beta_d$  (preto),  $\beta_t$  (cinza),  $\alpha$  (pontilhado).

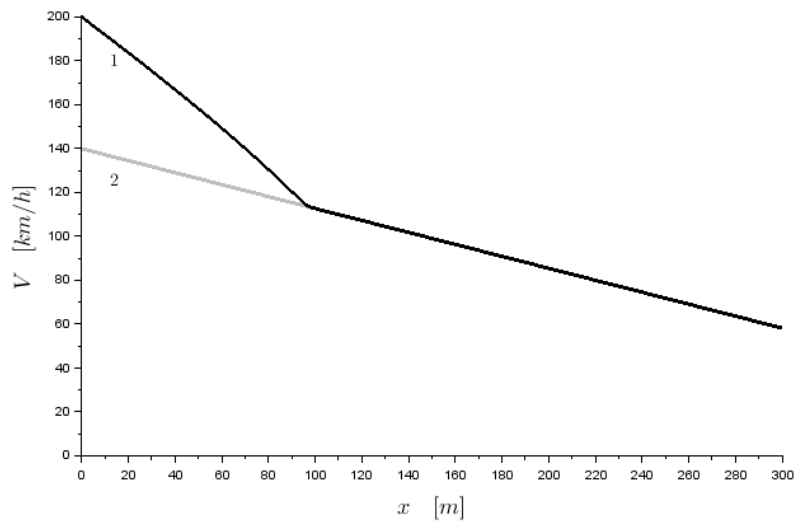


Figura 11: Movimento da moto com velocidade inicial  $V_0= 200$  km/h, usando apenas o controle de velocidade.

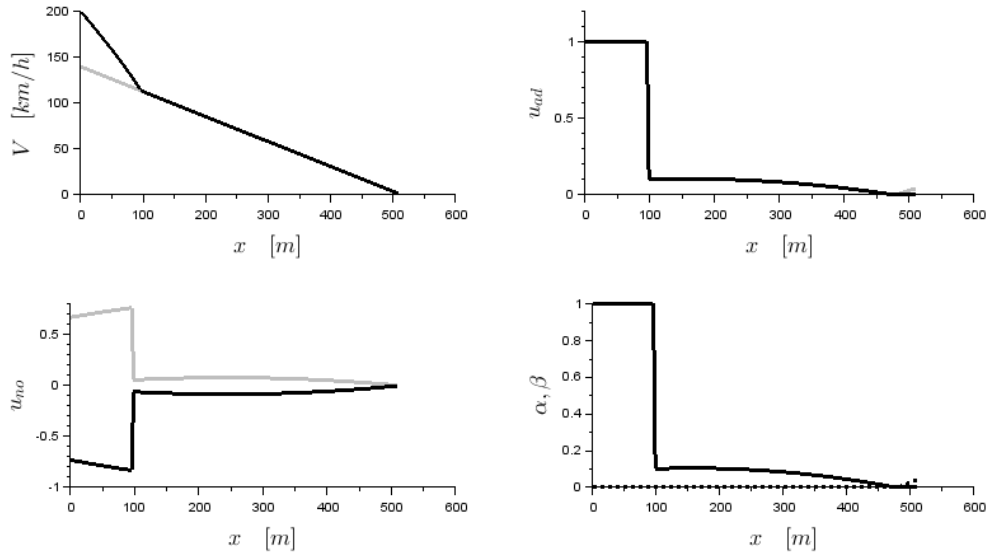


Figura 12: Movimento da moto com velocidade inicial  $V_0=200$  km/h, usando apenas o controle de velocidade. [Ver legenda dos gráficos na Figura 10]

uma nítida transferência de peso<sup>15</sup> para o roda dianteira durante a frenagem, conforme esperado. Pode parecer curioso que o uso máximo do freio ( $\beta = 1$ ) tenha coincido com a utilização máxima da aderência ( $u_{ad,d} = u_{ad,t} = 1$ ), mas isso não é coincidência. A forma com que definimos  $\beta$  nas Equações 9 e 10 faz com que a utilização da aderência seja igual ao uso do freio, pelo menos durante as frenagens em retas. Isso não é verdade nas curvas e nas acelerações. Portanto, pelo menos nas retas, o nosso modelo se assemelha a uma moto com freio ABS.

Aparentemente, então, basta controlar a velocidade que a moto não realizará manobras indesejadas. Para confirmar isto, vamos submeter a moto a situações mais extremas. Na Figura 13, a moto agora tenta acelerar a 200 km/h o tempo todo, desde a largada (no exemplo da Figura 9, no início da prova a curva de velocidade desejada tinha uma subida gradual). Além disso, o coeficiente de atrito foi reduzido de 0,8 (pista seca) para 0,4 (pista molhada) neste exemplo. Nesse cenário, a moto não tem atrito suficiente para garantir a aderência na propulsão, e vê-se na Figura 13[DS] que  $u_{ad,t}$  é superior a 1 em quase todo o percurso, significando que a moto está "patinando" a roda traseira. O sistema de controle de velocidade não é suficiente neste caso.

Outro caso extremo está mostrado na Figura 14, parecido com a frenagem da Figura 12, mas agora a redução de velocidade desejada é repentina.

<sup>15</sup>Quanto maior o aumento da normal em uma das rodas, menor o seu valor de  $u_{no}$ .

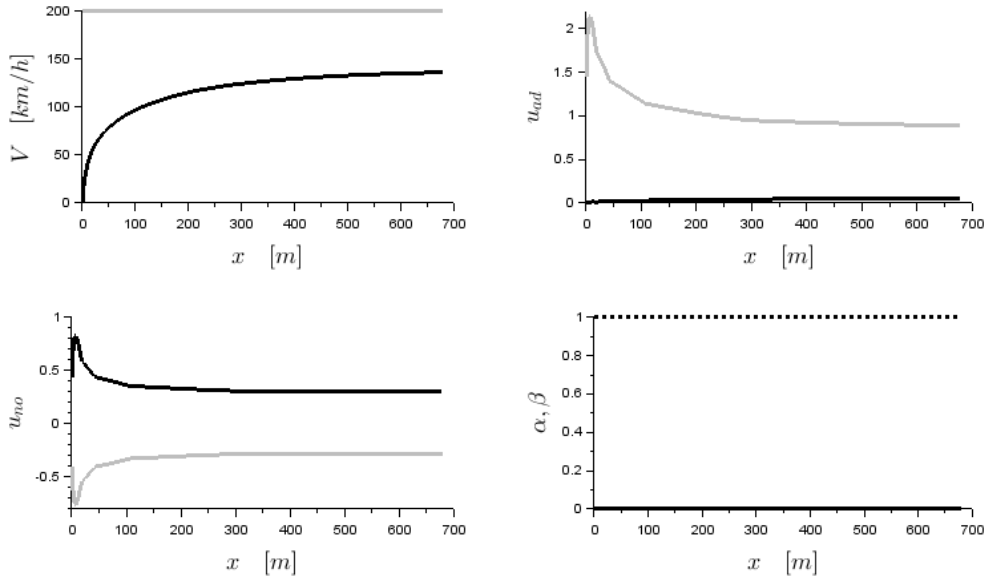


Figura 13: Movimento da moto com velocidade inicial  $V_0=1$  m/s, usando apenas o controle de velocidade. Coeficiente de atrito reduzido para  $\mu=0,4$  ( $\mu=0,8$  no Caso Base). [Ver legenda dos gráficos na Figura 10]

Para piorar o teste, aumentamos a altura do centro de gravidade,  $h_{CG}$ , de 0,72 para 1,12 m. Com esse aumento, a transferência de peso é maior, facilitando o levantamento da roda traseira na frenagem. Nesse caso, vemos na Figura 14[EI] como  $u_{no,t}$  é superior a 1, representando o levantamento da roda traseira durante a frenagem. Mais uma vez, este é um fenômeno em que o uso do controle de velocidade é insuficiente.

### 3.2 Controle de Utilização

Para lidar com os fenômenos mais extremos, em que o controle de velocidade permite a ocorrência de manobras indesejadas, propomos agora um controle secundário, a ser usado nos casos em que algum índice de utilização seja superior a 1. A Equação 44 expressa o controle de utilização do acelerador:

$$\alpha = \max_{\alpha=0 \rightarrow \alpha_{vel}} (\alpha) \quad | \quad \{(u_{ad,t} \leq u_{\alpha,max}) \wedge (u_{ad,d} \leq u_{\alpha,max}) \wedge (u_{no,d} \leq u_{\alpha,max})\} \quad (44)$$

No caso do uso do acelerador,  $\alpha$ , o sistema escolherá o maior valor possível de  $\alpha$  tal que não haja perda de aderência em nenhuma das duas rodas (no caso de curvas, pode haver perda de aderência na roda dianteira



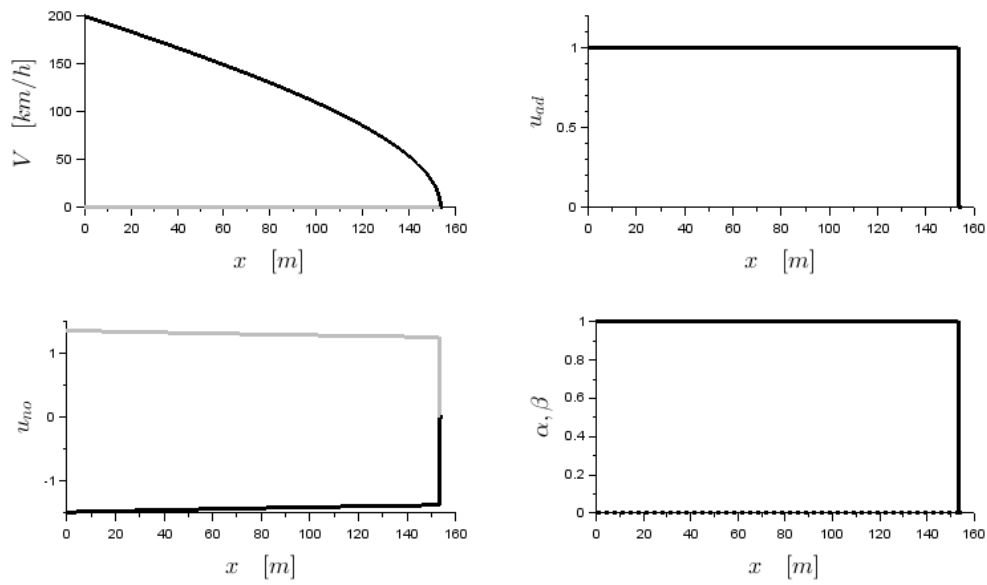


Figura 14: Movimento da moto com velocidade inicial  $V_0=200$  km/h, usando apenas o controle de velocidade. Altura do centro de gravidade,  $h_{CG}$ , aumentado para 1,12 m ( $h_{CG}=0,72$  no Caso Base). [Ver legenda dos gráficos na Figura 10]

durante a aceleração) ou levantamento da roda dianteira. Por segurança, usaremos o valor  $u_{\alpha,max}$  um pouco menor que 1 como limite para a entrada do controle secundário.

Faremos da mesma forma para o uso do freio,  $\beta$ , mas neste caso monitorando a perda de aderência nas duas rodas e o levantamento da roda traseira.

$$\beta = \max_{\beta=0 \rightarrow \beta_{vel}} (\beta) \quad | \quad \left\{ (u_{ad,t} \leq u_{\beta,max}) \wedge (u_{ad,d} \leq u_{\beta,max}) \wedge (u_{no,t} \leq u_{\beta,max}) \right\} \quad (45)$$

No modelo computacional utilizado nesta apostila, a busca pelo valor de  $\alpha$  e  $\beta$  que satisfazem as Equações 44 e 45 é feita por uma busca em decrementos discretos (i.e., os valores vão sendo reduzidos em uma quantidade  $\delta_\alpha$  e  $\delta_\beta$  a cada tentativa, conforme valores na Tabela 1). Isso pode causar um certo serrilhado nas soluções<sup>16</sup>.

Na Figura 15 nós voltamos ao fenômeno estudado na Figura 13, mas agora usando o controle de utilização. Vemos na Figura 15[DS] que toda vez que a moto vai perder a aderência na roda traseira, ela modula o uso do acelerador para não perder a aderência. Logo, o sistema de controle proposto funcionou nesse caso. O problema é a forma serrilhada, causada por um  $\delta_\alpha=0,1$  (i.e., o sistema de controle de utilização varia  $\alpha$  em passos de 0,1). Na Figura 16 diminuimos  $\delta_\alpha$  de 0,1 para 0,01, e podemos ver como as curvas ficam mais contínuas se o sistema de controle puder testar valores mais refinados para  $\alpha$ .

Da mesma forma, a Figura 17 é o retorno do fenômeno estudado na Figura 14, mas agora com o controle de utilização também. Podemos observar como agora o freio é liberado toda vez que a roda traseira ameaça levantar (i.e.,  $u_{no,t}$  se aproxima de 1). A Figura 18 é o mesmo estudo, mas aqui usando  $\delta_\beta=0,01$ , que consegue manter uma curva um pouco mais contínua de  $\beta$ .

### 3.3 Curvas

Vejamos agora o que acontece quando há curvas no caminho. No mundo real, as curvas são complicadas para o piloto, pois o atrito é usado pela força centrípeta para manter a trajetória curvilínea. Caso a moto não consiga continuar na curva, ela sairá da pista, colidindo com algum obstáculo. Por isso, o piloto precisa frear antes de chegar na curva. Certamente os dois controles que propusemos até agora (i.e., controle de velocidade e controle de

<sup>16</sup>Como no caso real do freio ABS, que trava e solta o freio.

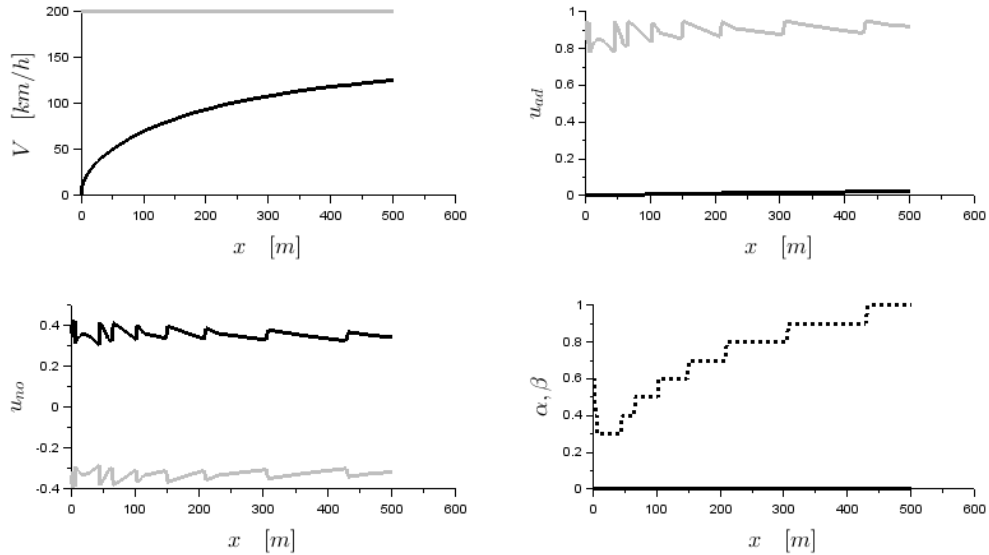


Figura 15: Movimento da moto com velocidade inicial  $V_0=1$  m/s, usando o controle de velocidade e o controle de utilização. Coeficiente de atrito reduzido para  $\mu=0,4$  ( $\mu=0,8$  no Caso Base). [Ver legenda dos gráficos na Figura 10]

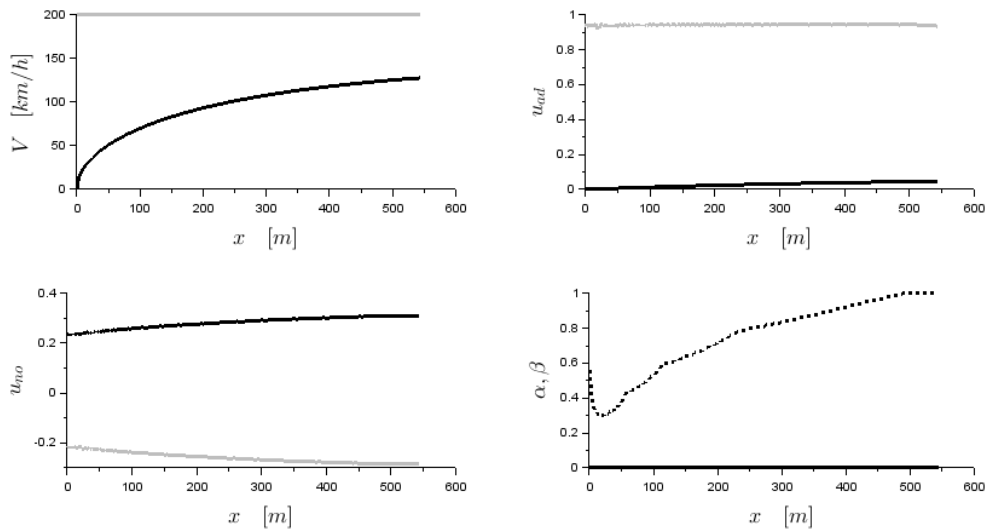


Figura 16: Movimento da moto com velocidade inicial  $V_0=1$  m/s, usando o controle de velocidade e o controle de utilização. Coeficiente de atrito reduzido para  $\mu=0,4$  ( $\mu=0,8$  no Caso Base). Decremento de  $\alpha$  reduzido para  $\delta_\alpha=0,01$  ( $\delta_\alpha=0,1$  no Caso Base). [Ver legenda dos gráficos na Figura 10]

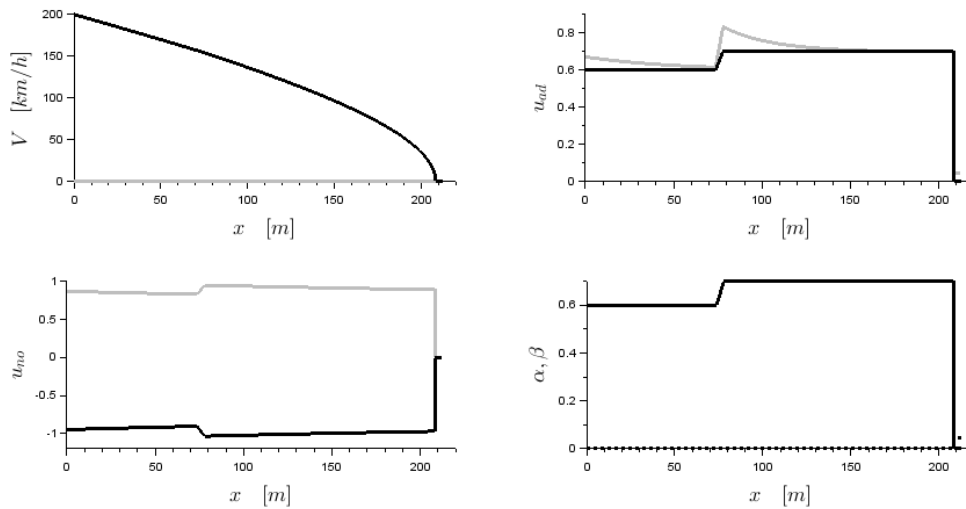


Figura 17: Movimento da moto com velocidade inicial  $V_0=200$  km/h, usando controle de velocidade e o controle de utilização. Altura do centro de gravidade,  $h_{CG}$ , aumentado para 1,12 m ( $h_{CG}=0,72$  no Caso Base). [Ver legenda dos gráficos na Figura 10]

utilização) não serão suficientes, pois ambos tomam decisões baseadas no que está acontecendo naquele momento, não no que acontecerá um pouco mais à frente. Mas, antes de propormos algo novo, vejamos quando o problema aparece. Afinal, não é uma boa ideia propor soluções antes de conhecer o problema.

Na Figura 19, a moto parte do quase repouso. O motoqueiro tenta o tempo todo alcançar os 200 km/h. Nos primeiros 20 metros o sistema de controle de utilização diminui um pouco o acelerador para manter a aderência da roda traseira. Nessa pista, após 250 m há uma curva com raio de 200m de curvatura ( $R_{curv}$ ). Um pouco antes da curva, a moto está usando cerca de 50% da aderência traseira ( $u_{ad,t} \approx 0,5$ ). Logo que entra na curva, a moto usa quase toda a aderência ( $u_{ad,t} \approx 1$ ), pois o motoqueiro (o sistema de controle de utilização) diminui o acelerador para cerca de 70% ( $\alpha \approx 0,7$ ). Sorte!

A Figura 20 tem uma pista e um movimento muito parecidos com o estudo anterior, mas agora a curva que começa em 250 m tem raio um pouco menor,  $R_{curv}=100$  m. Assim que a moto entra na curva, mesmo o piloto reduzindo completamente o uso do acelerador para zero, a velocidade ainda é alta demais para a curva. E não adianta mais frear, porque todo o atrito nesse caso é usado pela força centrípeta. O motoqueiro deveria ter freado antes. Precisamos de um sistema de controle mais inteligente.

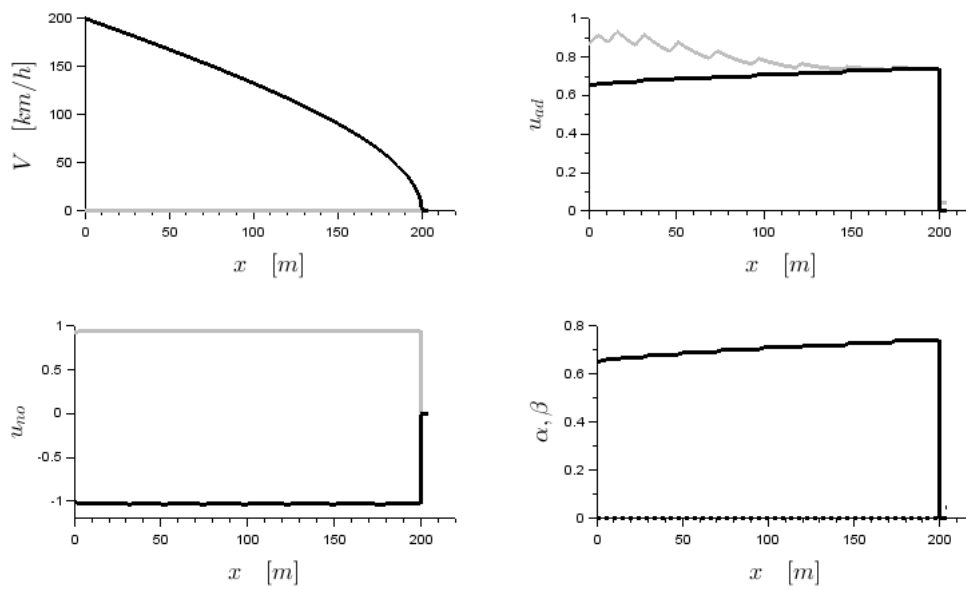


Figura 18: Movimento da moto com velocidade inicial  $V_0 = 200$  km/h, usando apenas o controle de velocidade e o controle de utilização. Altura do centro de gravidade,  $h_{CG}$ , aumentado para 1,12 m ( $h_{CG} = 0,72$  no Caso Base). Decremento de  $\beta$  reduzido para  $\delta_\beta = 0,01$  ( $\delta_\beta = 0,1$  no Caso Base). [Ver legenda dos gráficos na Figura 10]

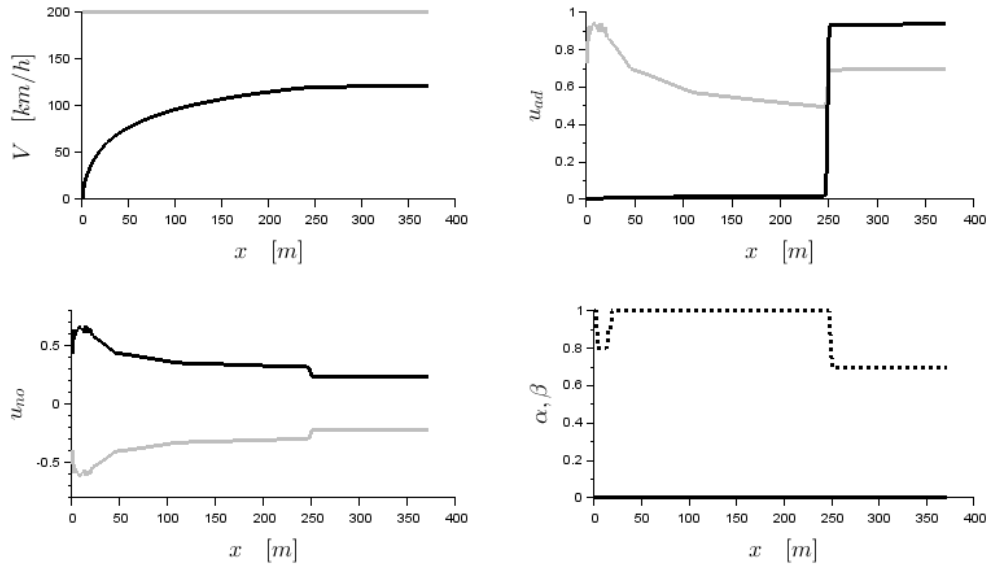


Figura 19: Movimento da moto com velocidade inicial  $V_0=1$  m/s, com o piloto desejando alcançar 200 km/h. Pista: reta de 250m, seguida por uma curva com raio de curvatura  $R_{curv}=200$  m. Usando controle de velocidade e controle de utilização. [Ver legenda dos gráficos na Figura 10]

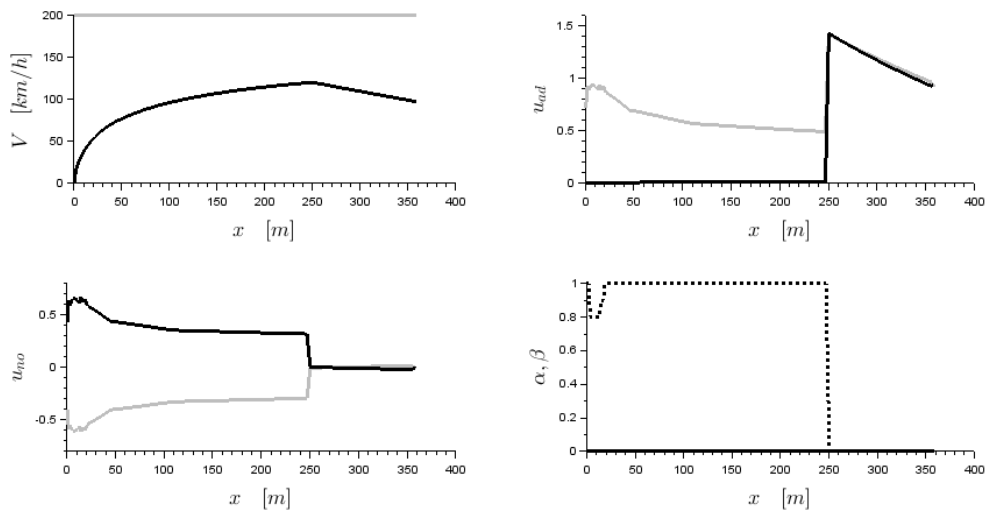


Figura 20: Movimento da moto com velocidade inicial  $V_0=1$  m/s, com o piloto desejando alcançar 200 km/h. Pista: reta de 250m, seguida por uma curva com raio de curvatura  $R_{curv}=100$  m. Usando controle de velocidade e controle de utilização. [Ver legenda dos gráficos na Figura 10]

## Velocidade Máxima na Curva

Vamos agora propor um modelo simplificado para o piloto prever qual deve ser a velocidade da moto em um determinado ponto da curva para conseguir se manter na pista. O modelo do piloto<sup>17</sup> não precisa ser exato, já que é apenas um modelo que está na mente dele. Por outro lado, o modelo da moto precisa ter, e tem, uma equação exata (Equação 15) para a simulação correta da física da moto.

Voltemos ao modelo do piloto. No caso limite, a força centrípeta usa completamente a força de atrito disponível (o piloto não deve frear ou acelerar quando está prestes a perder a aderência<sup>18</sup>):

$$F_{\text{cen}} = F_{\text{disp}} \quad (46)$$

Desconsiderando a transferência de peso e o aclive da pista:

$$\frac{m_c V^2}{R_{\text{curv}}} = \mu m_c g \quad (47)$$

Ou:

$$V_{\text{loc}} = \sqrt{\mu g R_{\text{curv}}} \quad (48)$$

Lembrando que precisamos apenas dessa equação aproximada como modelo do piloto, pois o sistema de controle de utilização e o modelo da moto (Equação 15) ajustam o movimento correto da moto durante a simulação.

## Frenagem

Como dito anteriormente, o piloto precisa frear antes de chegar na curva. Logo, ele precisa agir um pouco antes para alcançar a velocidade local,  $V_{\text{loc}}$ , necessária para não cair. Vamos imaginar agora que ele freia em uma pista plana, horizontal, reta, sem transferência de peso e sem resistências<sup>19</sup>. Nesse caso, a disponibilidade da força de frenagem é:

<sup>17</sup>É importante distinguir o modelo do piloto (que é usado para decidir o uso do acelerador, do freio e das marchas) do modelo da moto (que simula o movimento real da moto dependendo da escolha do piloto). Em vários momentos, como por exemplo na Equação 39, o piloto usa a equação da dinâmica da moto para tomar alguma decisão. Mas esse uso pelo piloto deve ser visto apenas como uma representação da sua experiência passada com as motocicletas, não como a simulação em si do movimento.

<sup>18</sup>A não ser que esteja realizando uma manobra do tipo *power slide*, mas não vamos considerar esse tipo de fenômeno por ora.

<sup>19</sup>Desprezar as resistências no modelo do piloto está do lado da segurança, pois quando a moto for simulada pela Equação 15, as resistências vão ajuda-la na redução da velocidade.

$$F_{\text{disp}} = \mu m_c g \quad (49)$$

Em outras palavras, a (des)aceleração é  $a = -\mu g$ . Considerando agora que a (des)aceleração é constante durante a frenagem, sabemos, do estudo do movimento uniformemente (des)acelerado, que:

$$\Delta x = V_0 \Delta t + \frac{a}{2} \Delta t^2 \quad (50)$$

$$V = V_0 + a \Delta t \quad (51)$$

Substituindo uma equação na outra, eliminando  $\Delta t$ , e substituindo a nossa aceleração, chegamos à Equação de Torricelli:

$$V = \sqrt{V_0^2 - 2\mu g \Delta x} \quad (52)$$

No modelo do piloto, o raio e o coeficiente do atrito serão tomados no ponto futuro, como se ele imaginasse estar em uma reta com  $\mu_{x+\Delta x}$  um pouco antes de uma curva de raio  $R_{\text{curv},x+\Delta x}$  (avaliados em  $x + \Delta x$ ). Logo, imaginando que a moto tem uma desaceleração máxima de  $-\mu g$ , e que precisa alcançar a velocidade  $V_{\text{loc}}$  em uma distância  $\Delta x$ , ele precisa estar na velocidade  $V_x$  antes disso:

$$V_x = \sqrt{g\mu_{x+\Delta x} \left( R_{\text{curv},x+\Delta x} + 2\Delta x \right)} \quad (53)$$

### 3.4 Controle Antecipado

O problema agora é que o raio de curvatura e o coeficiente de atrito mudam de posição a posição, o que torna difícil decidir o valor de  $\Delta x$  que o modelo do piloto precisa considerar. Por exemplo, em uma determinada posição, a moto pode estar a 80 m de uma curva com raio de curvatura 100 m, e a 85 m de outra curva com raio de curvatura de 50 m. Na posição atual, a moto precisa se preparar para qual delas? Para lidar com isso, propomos o seguinte modelo para calcular a velocidade de segurança:

$$V_{\text{seg},x} = \left\{ \min_{0 \leq \Delta x \leq d_{\text{visao}}} \left[ \sqrt{g\mu_{x+\Delta x} \left( R_{\text{curv},x+\Delta x} + 2\Delta x \right)} \right] \right\} f_{\text{red},\text{seg}} \quad (54)$$

Que leva em conta todas as possíveis curvas que possam existir no percurso em frente, dentro de um campo de visão do piloto de  $d_{\text{visao}}$  metros. A



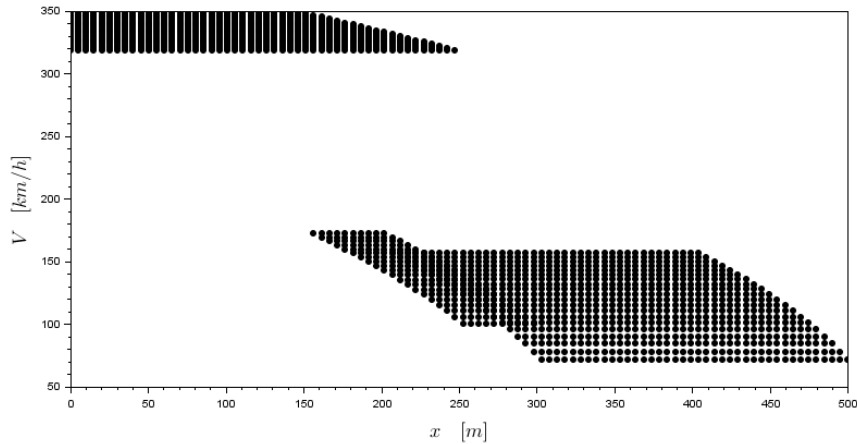


Figura 21: Velocidade de segurança. Pista: curva de 250 m com  $R_{curv}=1000$  m, seguida de curva de 50 m com raio de curvatura  $R_{curv}=100$  m, seguida de curva com raio de curvatura  $R_{curv}=50$  m. Campo de visão,  $d_{visao}$ , de 100 m.

Figura 21 mostra como seria a velocidade de segurança para uma pista cujos primeiros 250 m tem raio de curvatura  $R_{curv}=1000$  m (*i.e.*,  $V_{loc} = 320$  km/h), depois uma curva de 50m de comprimento com raio de curvatura  $R_{curv}=100$  m (*i.e.*,  $V_{loc} = 101$  km/h), e finalmente uma outra curva com raio de curvatura  $R_{curv}=50$  m (*i.e.*,  $V_{loc} = 71$  km/h). O coeficiente de atrito é o do Caso Base (*i.e.*,  $\mu=0,8$ ) e o piloto enxerga 100 m na sua frente (*i.e.*,  $d_{visao}=100$  m). Para fazer a Figura 21, em cada posição avaliamos todos os possíveis valores do argumento da função  $\min()$  na Equação 54. Vê-se que, dependendo da distância olhada para a frente (no intervalo  $0 \leq \Delta x \leq d_{visao}$ ), o motoqueiro pensa que deveria estar em uma certa velocidade para conseguir frear para a próxima curva. Por exemplo, na posição 200 m, o motoqueiro pode rodar ( $R_{curv}=1000$  m) a 320 km/h. Mas quando olha 50 m a frente, percebe que há uma curva com  $R_{curv}=100$  m, na qual precisará estar a 101 km/h. Então, pela Equação 52, ele percebe que não pode estar a 320 km/h, mas sim aproximadamente a 140 km/h, para poder frear a tempo. E assim o modelo faz todas as simulações dentro do campo de visão de todas as posições, escolhendo sempre a velocidade mínima, conforme a Equação 54.

Obviamente, esse é um modelo simplificado, pois não necessariamente a pista é plana, reta, e com atrito constante até o início da próxima curva. Assim como no mundo real, o piloto nunca tem certeza exata da velocidade limite para fazer uma certa curva. Por isso, ele sempre deve rodar abaixo da velocidade máxima teórica. Esse é a função do redutor  $f_{red,seg}$ , que colocamos

na Equação 54. Por outro lado, um piloto de corrida consegue chegar bem próximo ao limite, mas para tanto ele faz a mesma curva várias vezes, cada vez aumentando um pouco a velocidade para determinar o limite. Aliás, aí está uma boa estratégia de controle para o nosso piloto: fazê-lo percorrer várias vezes a pista até aprender! Fica como proposta para o leitor.

Voltando à proposição do sistema de controle antecipado, agora trata-se de uma modificação simples. Na Equação 37, quando calculamos a aceleração desejada,  $a_{des}$ , basta agora apenas escolher o valor mínimo entre a velocidade desejada pelo piloto,  $V_{des}$ , e a velocidade de segurança que ele precisa estar para conseguir frear para a próxima curva,  $V_{seg}$ :

$$a_{des} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\min(V_{des,x + V \Delta t}, V_{seg,x + V \Delta t}) - V_x}{\Delta t} \quad (55)$$

Apenas como experiência, na Figura 22 refizemos o movimento da Figura 20, mas agora usando o sistema de controle antecipado. Neste primeiro exemplo, o campo de visão,  $d_{visao}$ , foi de 0 m. O que significa que a velocidade desejada local escolhe o mínimo entre  $V_{des}$  e  $V_{loc}$ , mas não consegue antecipar a curva. Vemos que as duas figuras são bastante parecidas, o que significa que o controle de utilização já conseguia lidar implicitamente com a limitação local da velocidade (afinal, ele controla os índices de utilização, que levam em conta a força centrípeta).

Já na Figura 23, o piloto tem um campo de visão de 100 m. Isso pode ser visto no gráfico [DI], em que o freio é acionado antes do início da curva (a curva começa apenas em 250 m).

Vamos piorar um pouco a situação, para ver se o sistema de controle antecipado ainda é eficiente. Na Figura 24, a curva que começa em 250 m teve seu raio de curvatura diminuído para 50 m. Como se vê, o modelo conseguiu antecipar essa curva também. Um pouco depois de passar pela posição de 210 m, o motoqueiro começa a frear para chegar na velocidade correta na curva.

Pioramos um pouco mais agora, na Figura 25. A pista é reta até 250 m. Depois, há uma curva de 100 m com raio de curvatura de 100 m. No final, na posição 350 m, a curva fecha mais ainda, tendo agora um raio de curvatura de 50 m. Vê-se que nessa situação o piloto não consegue mais frear para a segunda curva, já que o índice de utilização da aderência traseira e dianteira chegam a 1,5 no início da segunda curva. Isso acontece porque, no cálculo da velocidade de segurança, imaginamos que todo o atrito seria disponível para a frenagem, o que não é verdade no caso de uma curva seguida de outra. Interessante também que essa é uma situação bastante complicada no mundo real, quando o motoqueiro descobre que a curva fecha para um raio menor quando não há mais condições de frear de forma apropriada.

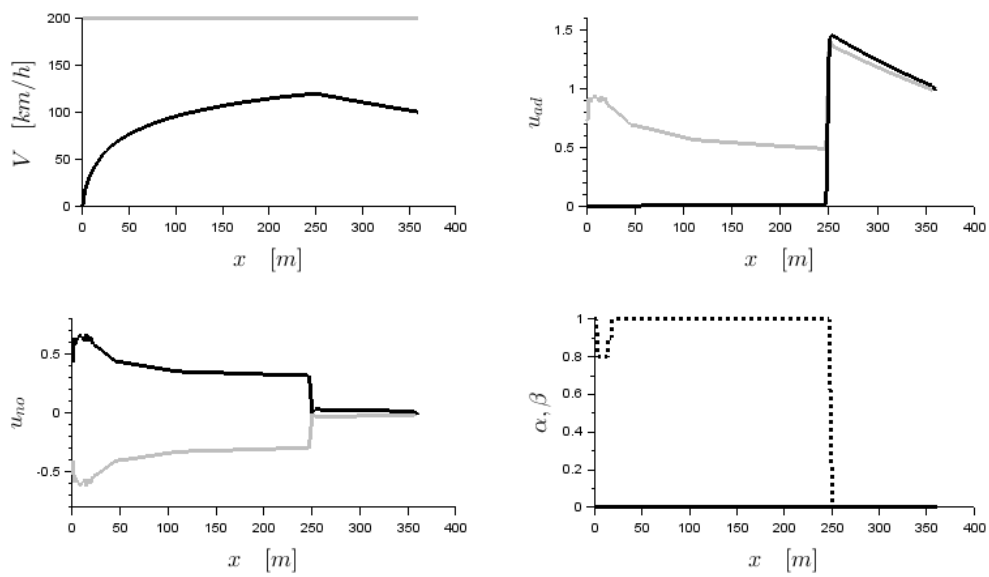


Figura 22: Movimento da moto com velocidade inicial  $V_0=1$  m/s, com o piloto desejando alcançar 200 km/h. Pista: reta de 250m, seguida por uma curva com raio de curvatura  $R_{curv}=100$  m. Usando controle de velocidade, controle de utilização e controle antecipado ( $d_{visao}=0$ m). [Ver legenda dos gráficos na Figura 10]

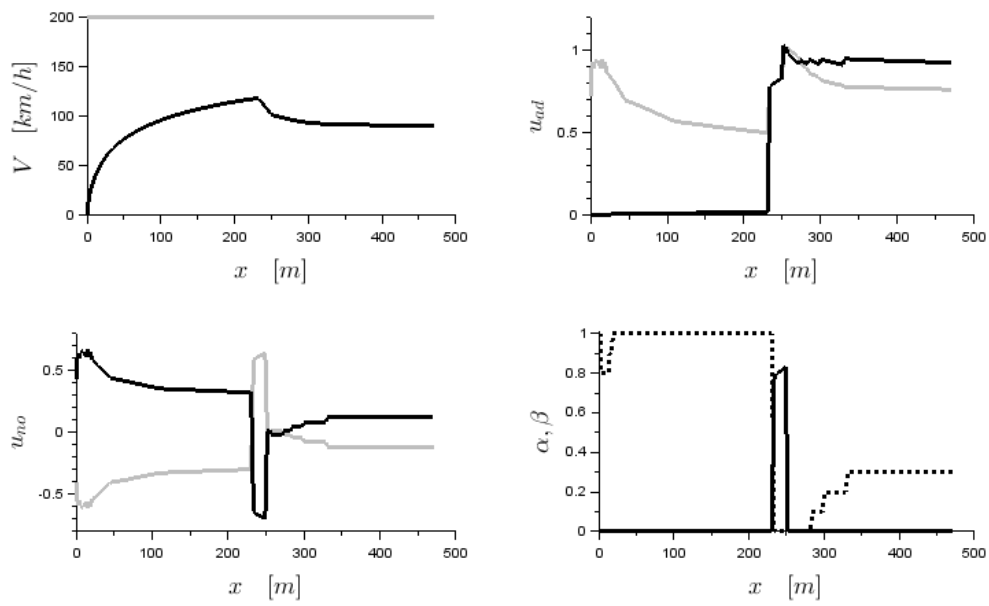


Figura 23: Movimento da moto com velocidade inicial  $V_0 = 1$  m/s, com o piloto desejando alcançar 200 km/h. Pista: reta de 250m, seguida por uma curva com raio de curvatura  $R_{curv} = 100$  m. Usando controle de velocidade, controle de utilização e controle antecipado ( $d_{visao} = 100$  m). [Ver legenda dos gráficos na Figura 10]

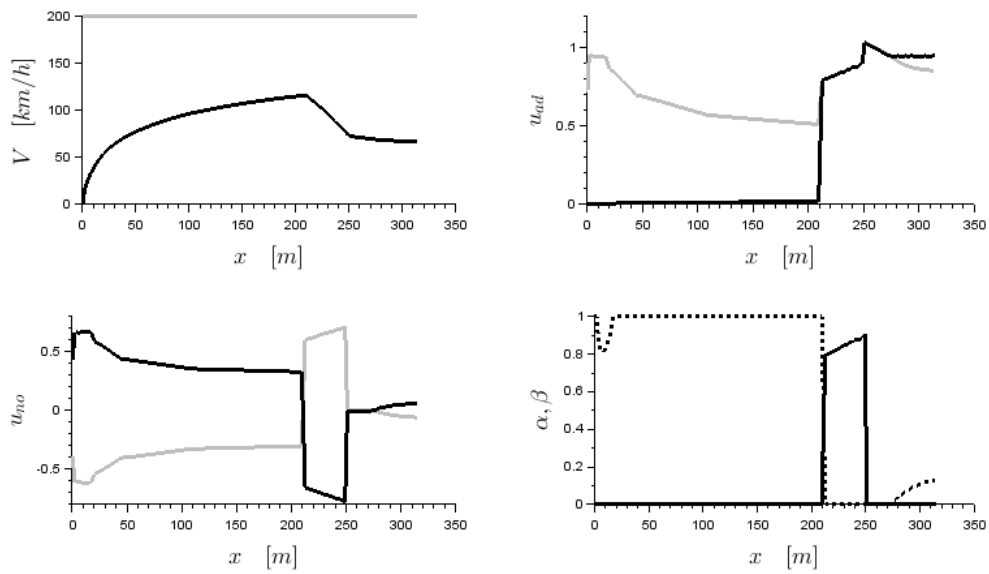


Figura 24: Movimento da moto com velocidade inicial  $V_0=1$  m/s, com o piloto desejando alcançar 200 km/h. Pista: reta de 250m, seguida por uma curva com raio de curvatura  $R_{curv}=50$  m. Usando controle de velocidade, controle de utilização e controle antecipado ( $d_{visao}=100$ m). Decremento de  $\alpha$  reduzido para  $\delta_\alpha=0,01$  ( $\delta_\alpha=0,1$  no Caso Base). [Ver legenda dos gráficos na Figura 10]

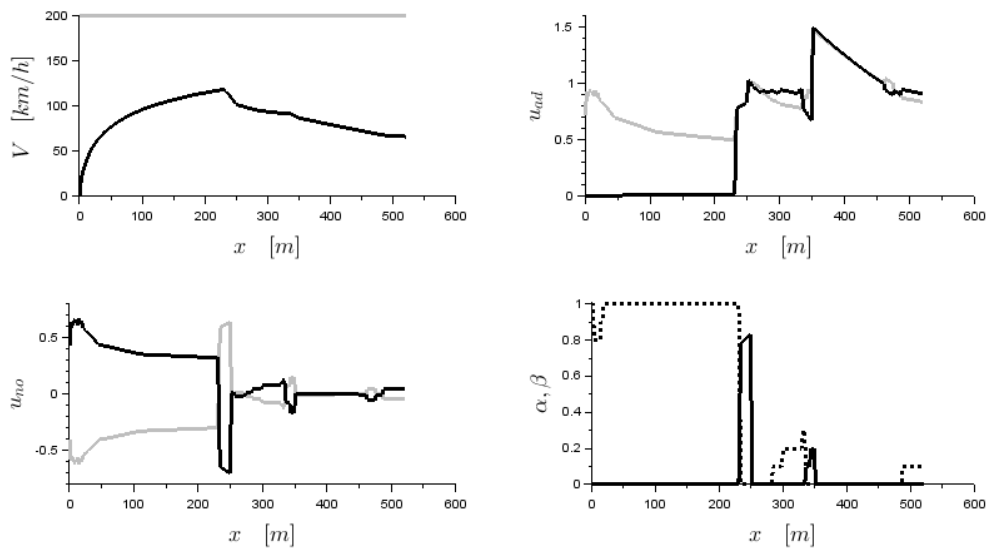


Figura 25: Movimento da moto com velocidade inicial  $V_0= 1$  m/s, com o piloto desejando alcançar 200 km/h. Pista: reta de 250m, seguida por uma curva de 100m com raio de curvatura  $R_{curv}=100$  m, seguida de uma curva com raio de curvatura  $R_{curv}=50$  m. Usando controle de velocidade, controle de utilização e controle antecipado ( $d_{visao}=100$ m). [Ver legenda dos gráficos na Figura 10]

## 4 Solução Computacional

Antes de continuar, façamos uma breve revisão de como foi o desenvolvimento do modelo matemático e do modelo computacional nas apostilas passadas. Sobre o modelo matemático: em *Física Básica das Motos* desenvolvemos o balanço de forças externas sobre as motos; em *Solução Computacional do Movimento das Motos* reescrevemos as equações deixando-as em uma forma mais apropriada para a solução computacional; em *A Moto por Dentro* calculamos como a potência vai da saída do motor até a roda; em *O Motor da Moto* como a potência do combustível se transforma em potência mecânica na saída do motor; e na presente apostila, *O Piloto da Moto*, incluímos as equações de controle do piloto no modelo. Sobre o modelo computacional: em *Física Básica das Motos* resolvemos apenas os casos algébricos; em *Solução Computacional do Movimento das Motos* aprendemos como resolver um sistema de equações diferenciais (esse conhecimento é fundamental para compreender a solução da presente seção); em *A Moto por Dentro* calculamos a transmissão de potência mecânica dentro da moto; em *O Motor da Moto* como a potência do motor é gerada; e na apostila de hoje, *O Piloto da Moto*, como lidar com o sistema de controle. Particularmente para a aula de hoje, não é necessário revisar completamente a apostila *O Motor da Moto*, pois estamos usando diretamente a curva ajustada da potência do motor — muito embora precisemos das tabelas apresentadas em seu apêndice.

A solução computacional é uma adaptação da solução que já veio sendo desenvolvida nas outras apostilas. A presente seção é apenas uma breve descrição dos seus principais elementos. É esperado que o leitor tenha estudado as outras apostilas e os outros algoritmos; que tenha rodado os programas anteriores e feito seus próprios estudos; e que já tenha estudado a teoria desta apostila. Depois, após ler esta seção, o leitor precisa estudar os códigos que a acompanham (o código é todo comentado), refazer os estudos apresentados nesta apostila, e construir os seus próprios estudos - o que inclui modificar o código, resolver eventuais conflitos numéricos ou físicos, e analisar os resultados.

Depois desses passos, esta solução computacional deixará de ser um fardo pesado e passará a ser uma ferramenta leve que permitirá compreender melhor o comportamento do conjunto moto e piloto. Devemos sempre lembrar que o nosso objetivo final nunca foi construir uma teoria ou uma solução computacional, mas sim desenvolver uma teoria e uma solução computacional para aprender sobre as motocicletas. Afinal, esta é uma disciplina sobre motocicletas, não sobre equações da física ou programação de computadores.

## Organização dos Arquivos

O código é dividido em três arquivos: **moto-s3.sce** (com o programa principal<sup>20</sup>), **get-par-s3.sci** (com os parâmetros de entrada e variáveis auxiliares<sup>21</sup>), e **func-s3.sci** (com as funções externas<sup>22</sup>). As variáveis estão organizadas em três estruturas: **sP** (dados principais<sup>23</sup>), **sA** (variáveis auxiliares<sup>24</sup>), e **sE** (variáveis de saída<sup>25</sup>).

## O Programa Principal

A solução computacional foi implementada em *Scilab*<sup>26</sup>. Para começar, vejamos a estrutura do programa principal, apresentada na Tabela 5 do Apêndice. Ele é extremamente simples e é basicamente o mesmo usado nas apostilas anteriores. Os Blocos B1-3 são responsáveis por comandos ao computador, carregar as funções e os dados que serão utilizados depois. O Bloco B4 chama a função *get\_vetor\_Vseg()*, que calcula o vetor de velocidade de segurança em função da distribuição de raios de curvatura e de coeficientes de atrito ao longo da pista (Equação 54). O Bloco B5 é o coração do programa, pois chama a função *ode()*, o *solver* do *Scilab*, que resolve a equação diferencial que implementamos na *Função S()*. Depois de encontrada a solução da equação diferencial, *i.e.*, como a velocidade da moto varia com o tempo, Bloco B6 simplesmente calcula uma porção de resultados auxiliares para fazer os gráficos e as tabelas que nos possibilitarão fazer a análise do fenômeno.

## A Função *S()*

Como comentado no parágrafo anterior, o coração do modelo matemático está na *Função S()*<sup>27</sup>, que é a implementação da equação diferencial (Equa-

<sup>20</sup>A descrição do programa principal está na Tabela 5 no Apêndice desta apostila.

<sup>21</sup>A descrição dos dados de entrada estão divididos nas Tabelas 12-23 do apêndice da apostila *O Motor da Moto* e os dados novos específicos dos modelos de controle estão na Tabela 1 desta apostila.

<sup>22</sup>A descrição das funções externas está na Tabela 4 no Apêndice desta apostila.

<sup>23</sup>A estrutura **sP** é construída pela função *get\_parametros\_v3()*, incluída no arquivo **get-par-s3.sci**.

<sup>24</sup>As variáveis auxiliares contidas na estrutura **sA** são calculadas na função *get\_parametros\_v3()*, incluída no arquivo **get-par-s3.sci**. Essas variáveis auxiliares dizem mais respeito ao modelo do motor termodinâmico, com os coeficientes estequiométricos da combustão e propriedades geométricas do mecanismo biela-manivela.

<sup>25</sup>As variáveis de saída contidas na estrutura **sE** estão descritas nas Tabelas 2 e 3 desta apostila.

<sup>26</sup>O *Scilab* pode ser baixado em <http://www.scilab.org/download>

<sup>27</sup>A *Função S()*, bem como todas as outras funções externas que veremos mais adiante, está implementada no arquivo **func-s3.sci**.



ção 15) juntamente com o sistema de controle proposto nesta apostila. Podemos ver sua descrição na Tabela 6 do Apêndice. Basicamente, a *Função S()*: extrai  $x$  e  $V$  do vetor  $Q = [x, V]$ ; calcula a potência máxima da roda pela função *eval\_Pmaxroda()* (Equação 8); carrega as condições da pista (*i.e.*,  $W$ ,  $\theta_{pista}$ ,  $\mu$ , e  $R_{curv}$ ) para aquela posição e calcula as forças estáticas (Equações 1—4) usando *get\_pista\_Fpos()* (Seção 2.2); chama o controle de velocidade na função *get\_alphabeta()* (Equações 41 e 42); calcula a aceleração por *get\_aceleracao()* (Equação 15); calcula as outras forças e os índices de utilização pela função *get\_uti()* (Seção 2.1); implementa o controle de utilização pelas equações  $\alpha = \alpha - \delta\alpha$  (Equação 44) e  $\beta_i = \beta_i - \delta\beta$  (Equação 45); e finalmente retorna a solução para o instante  $t$ , incluindo  $V$ ,  $a$  e **sE**.

Três pontos são muito importantes. Primeiro, a função *ode()* do *SciLab* internamente chama a *Função S()* muitas vezes, para muitos instantes de  $t$ , a fim de encontrar a solução de  $V$  para todos os instantes. A função *ode()* está interessada apenas no valor da aceleração calculada pela *Função S()*.

O segundo ponto é que nós, como analistas, queremos ter acesso às várias grandezas necessárias para o cálculo da aceleração, como as forças resistivas, os índices de utilização, o uso do acelerador e do freio, e assim por diante. Portanto, nós implementamos na *Função S()* também a saída da estrutura completa de resultados **sE** (ver Tabelas 2 e 3, conforme já havíamos comentado). Então, voltando ao programa principal (Tabela 5), a *Função S()* é chamada uma vez pelo *solver* no Bloco B5 (na verdade, o *solver* internamente chama a *Função S()* um grande número de vezes) que está interessado apenas nas acelerações. Depois, nós chamamos novamente a *Função S()* no Bloco B6.1, quando estamos interessados em toda a estrutura **sE** para fazer os gráficos que nos ajudarão nas análises.

O terceiro ponto importante é que, ao analisarmos a *Função S()*, parece que estão implementados apenas o controle de velocidade e o controle de utilização, mas não o controle antecipado. Mas devemos lembrar que o controle antecipado está implícito no cálculo da velocidade de segurança, que o programa principal realiza logo no início, no Bloco B4 (Tabela 5).

Quase todas as funções externas já foram citadas no texto acima, apenas duas foram deixadas para agora. A função *get\_Vdes()* é responsável por prover a curva de velocidade desejada para o simulador (Equação 36). A função *get\_Vseg()* interpola o vetor de velocidades de segurança toda vez que essa variável é necessária. Isso evita ter que calcular a Equação 54 o tempo todo.

## Questões Numéricas

Ao implementar a solução computacional, o principal objetivo foi fazê-la o mais simples e clara o possível. Isso significa que nem sempre escolhemos o método mais rápido ou o mais estável. Por isso, muitas vezes, ao rodar o programa, temos que esperar vários minutos<sup>28</sup>, e nem sempre a solução é alcançada. Essa não-convergência para a solução pode acontecer pela física (*e.g.*, queremos que a moto ande 500m, mas os dados a fazem parar no meio da pista; ou as resistências são muito altas e fazem a moto andar para trás<sup>29</sup>) ou por questões numéricas (*i.e.*, o *solver* não consegue encontrar uma solução em um tempo razoável). Quanto às questões numéricas, podemos "ajudar" o programa ajustando o tempo de simulação para que simule apenas a parte que nos interessa, e refinando os valores de decremento do sistema de controle de utilização (*i.e.*,  $\delta_\alpha$  e  $\delta_\beta$ ).

Para terminar a discussão computacional, aviso que alguns estudos feitos na parte inicial desta apostila precisaram de pequenas modificações no programa, como por exemplo quando "forçamos" o piloto a sempre usar 30% do acelerador, ou então quando fizemos os testes sem o uso do sistema de controle de utilização e do sistema de controle antecipado. Para isso, basta forçar o valor desejado de  $\alpha$  ou comentar as linhas que implementam os controles na *Função S()*.

## 5 Conclusão

Terminamos esta apostila. No desenvolvimento do modelo do piloto, percorremos o aprendizado de um piloto de verdade: primeiro ele sabia apenas usar o acelerador/freio em uma única posição, depois aprendeu controlar o acelerador/freio para alcançar uma velocidade desejada, depois como fazer correções para evitar manobras indesejadas, e finalmente a antecipar as curvas. Desta forma, o nosso objetivo foi plenamente alcançado, pois não estávamos interessados em desenvolver um super simulador de motos, mas sim a aprender como as motos funcionam e porque os pilotos tomam certas atitudes. A teoria, o modelo matemático e o modelo computacional foram apenas ferramentas neste caminho de aprendizado. Com esse conhecimento, o leitor poderá, agora, compreender o que acontece com as motos no mundo real ou a utilizar programas mais detalhados.

---

<sup>28</sup>O tempo de espera depende da configuração do seu computador.

<sup>29</sup>Como citado anteriormente, o nosso modelo matemático não inverte o sinal das resistências no caso de movimento para trás. Isso é desnecessário, pois a ciclística é tão diferente que a solução não seria mais válida de qualquer forma.

Para facilitar as análises, usamos dados relativamente simples, mas o leitor pode facilmente mudar as funções  $get\_teta\_pista()$ ,  $get\_W()$ ,  $get\_coefmu()$ , e  $get\_RCurvatura()$  para simular uma pista de testes bastante complexa: com vento variável, subidas e descidas, várias curvas diferentes, partes secas e molhadas.

O modelo da mente do piloto foi apenas aproximado. Isso não é um problema, por várias razões. Primeiro, queremos representar a mente do piloto, que também é um modelo aproximado da realidade<sup>30</sup>. Segundo, mesmo que o modelo do piloto seja aproximado ao calcular a velocidade de segurança (Equação 54)<sup>31</sup>, tanto o sistema de controle de utilização (Equações 44 e 45) quanto o cálculo da aceleração (Equação 15) levam em conta o modelo realista. No final das contas, a velocidade de segurança é usada apenas para ajustar os valores iniciais de  $\alpha$  e  $\beta$ , que depois são monitorados de forma correta pelos índices de utilização. Terceiro, sobre o sistema de controle como um todo (de velocidade, de utilização e antecipado), é preciso aperfeiçoá-lo para incluir uma solução numericamente mais estável, um cálculo mais rápido e, principalmente, o aprendizado do piloto. O modelo limitado aqui proposto, no entanto, serviu tanto para aprendermos as decisões básicas do piloto quanto, ao explicitar os casos em que não funciona (*e.g.*, uma curva mais aberta seguida de outra mais fechada), o caminho a seguir no seu aprimoramento.

Terminamos aqui o segundo módulo da disciplina, com o modelo do movimento longitudinal do conjunto motor/moto/piloto<sup>32,33</sup>, conforme representado pela Figura 26. De agora em diante estudaremos outros tópicos: faremos a análise econômica em *Análise Multimétrica das Motos*, estudaremos o comportamento da moto no meio de outros veículos em *A Moto no Tráfego*, veremos como a moto passa por obstáculos em *A Suspensão da Moto*, aprimoraremos alguns modelos em *Tópicos Técnicos Sobre Motocicletas*, ampliaremos nossa visão de assuntos não-técnicos em *Tópicos Gerais Sobre Duas Rodas*, e estudaremos as especificidades das "motos sem motor"

---

<sup>30</sup>Isso mesmo, um piloto real tem um modelo na sua mente sobre o que vai acontecer mais para a frente. Ele precisa desse modelo para tomar decisões. Nem sempre o modelo funciona, como sabemos na prática dos acidentes. Dois livros bastante interessantes sobre "como o piloto funciona" são *The Upper Half of the Motorcycle* de Spiegel (2010) e *Traffic: Why We Drive the Way We Do* de Vanderbilt (2009).

<sup>31</sup>Lembrando que no cálculo da velocidade de segurança o piloto imagina que irá frear antes da curva sem transferência de peso, em uma pista plana, horizontal, reta e com atrito constante — o que nem sempre é verdade, como vimos nos exemplos.

<sup>32</sup>O primeiro módulo foi a visão geral do universo das motos em *Visões das Motocicletas*.

<sup>33</sup>O segundo módulo consiste no desenvolvimento do modelo finalizado nesta apostila, compreendido nas apostilas *Física Básica das Motos*, *Solução Computacional do Movimento das Motos*, *A Moto por Dentro*, *O Motor da Moto* e *O Piloto da Moto*.

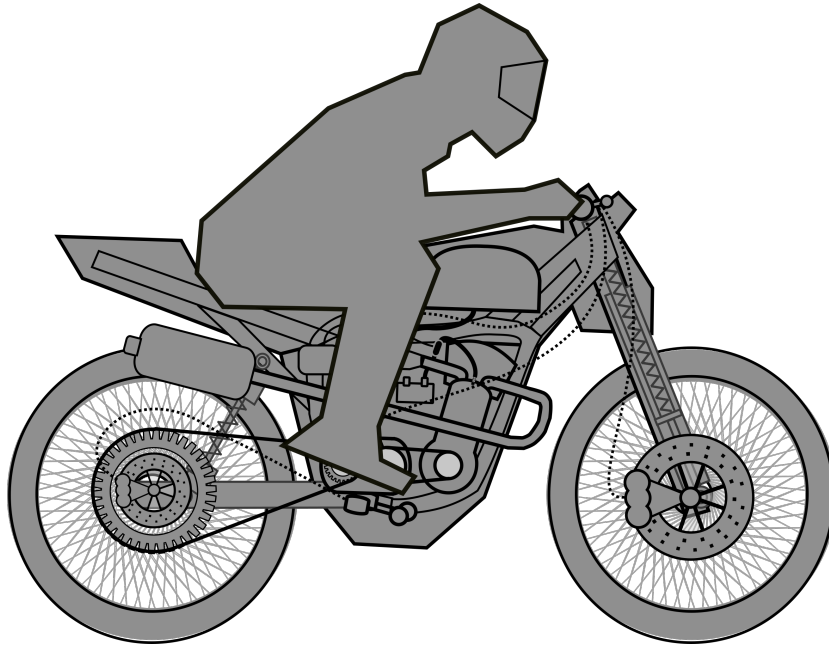


Figura 26: Modelo completo: motor, moto e piloto.

em *Visões das Bicicletas*.

Como todos sabemos, não basta só olhar a teoria. É preciso refletir sobre o que as equações estão nos dizendo sobre o mundo real, refazer as deduções, estudar os programas, rodar novamente os exemplos estudados, e construir os seus próprios estudos e análises. Depois que o conhecimento é adquirido, fica fácil desbravar o seu próprio caminho.

Sobre trabalhos futuros, algumas propostas são: refazer os estudos para outros motores e motocicletas, simular uma pista mais complexa, estudar o comportamento da moto com manchas de óleo na pista, propor um sistema de controle com  $\beta_t \neq \beta_d$ , analisar o comportamento dos sistemas de controle no caso de descidas, considerar a possibilidade de travamento das rodas nas frenagens, modificar o modelo para pistas com inclinação lateral, modelar um piloto com capacidade para aprender a pista, deduzir porque o controle de velocidade baseado nas acelerações funciona apesar de  $\alpha$  e  $\beta$  não serem diretamente proporcionais à aceleração, limitar a taxa de variação do uso do acelerador e do freio, levar em conta o tempo de reação do piloto, incluir o freio a motor, estudar os casos em que  $a_{max} < 0$  e  $a_{min} > 0$ , modificar o modelo para permitir o uso de  $V_0 = 0$  (e não um valor pequeno), implementar um método que use a solução do tempo anterior como condição inicial do tempo atual.

Assim como alguém que se divertiu montando uma moto, espero que

tenham se divertido montando este modelo dinâmico. E como alguém que montou uma moto quer passear com ela, espero que usem esse modelo para explorar um monte de outros fenômenos que estão contidos nas equações físicas que reunimos em nosso modelo matemático.

# Bibliografia

- Bradley, John. *The Racing Motorcycle: a Technical Guide for Constructors*. Broadland Leisure Publications, 1996.
- Cocco, Gaetano. *Motorcycle Design and Technology*. Giorgio Nada Editore, 2013.
- Cossalter, Vittore. *Motorcycle Dynamics*. LULU, 2006.
- Magnani, Fábio. *A Moto no Tráfego*. Equilíbrio em Duas Rodas, 2020.
- *A Moto por Dentro*. Equilíbrio em Duas Rodas, 2020.
- *A Suspensão da Moto*. Equilíbrio em Duas Rodas, 2020.
- *Análise Multimétrica das Motos*. Equilíbrio em Duas Rodas, 2020.
- *Física Básica das Motos*. Equilíbrio em Duas Rodas, 2020.
- *O Motor da Moto*. Equilíbrio em Duas Rodas, 2020.
- *O Piloto da Moto*. Equilíbrio em Duas Rodas, 2020.
- *Solução Computacional do Movimento das Motos*. Equilíbrio em Duas Rodas, 2020.
- *Tópicos Gerais Sobre Duas Rodas*. Equilíbrio em Duas Rodas, 2020.
- *Tópicos Técnicos Sobre Motocicletas*. Equilíbrio em Duas Rodas, 2020.
- *Visões das Bicicletas*. Equilíbrio em Duas Rodas, 2020.
- *Visões das Motocicletas*. Equilíbrio em Duas Rodas, 2020.
- Magnani, Fábio e Cunha, Saulo. “Estudo da Dinâmica das Motocicletas em Frenagens e Curvas: o Efeito da Técnica do Piloto e da Condição da Estrada”. Em: *Revista Brasileira de Ensino de Física* 39 (2017).
- Spiegel, Bernt. *The Upper Half of the Motorcycle*. Whitehorse, 2010.
- Tanelli, Mara, Corno, Matteo e Saveresi, Sergio. *Modelling, Simulation and Control of Two-Wheeled Vehicles*. 1st. Wiley, 2014.
- Vanderbilt, Tom. *Traffic: Why We Drive the Way We Do*. Vintage, 2009.

## Apêndice - Variáveis e Funções

Tabela 2: Estrutura **sE** – *parteA* - **getpar-s3.sci**

Variável	Descrição
<b>[Acelerações e potências]</b>	
$a$	aceleração, $m/s^2$
$a_{min}$	aceleração máxima, $m/s^2$
$a_{max}$	aceleração mínima, $m/s^2$
$P_{max,roda}$	potência máxima na roda, W
$P_{int}$	potência interna dissipada, W
$P_{comb}$	potência do combustível, W
$\eta_m$	eficiência do motor
<b>[Operação do motor]</b>	
marcha	[1-5]
$\omega_{motor}$	rotação do motor, rad/s
<b>[Forças]</b>	
$F_{grx}$	componente $x$ da força gravitacional, N
$F_{gry}$	componente $y$ da força gravitacional, N
$N_{rd}$	normal na roda dianteira, N
$N_{rt}$	normal na roda traseira, N
$F_{pro}$	força de propulsão, N
$F_{frn,d}$	força de frenagem dianteira, N
$F_{frn,t}$	força de frenagem traseira, N
$F_{aer}$	força de arrasto aerodinâmico, N
$F_{rol}$	força de resistência à rolagem, N
$F_{ine}$	força inercial, N
$F_{cen,d}$	força centrípeta na roda dianteira, N
$F_{cen,t}$	força centrípeta na roda traseira, N
$ F_{at,d} $	força de atrito na roda dianteira, N
$ F_{at,t} $	força de atrito na roda traseira, N
$ F_{disp,d} $	força de atrito disp. na dianteira, N
$ F_{disp,t} $	força de atrito disp. na traseira, N
$N_{est,d}$	força normal estática dianteira, N
$N_{est,t}$	força normal estática traseira, N



Tabela 3: Estrutura **sE** – *ParteB* - **getpar-s3.sci**

Variável	Descrição
<b>[Pista]</b>	
$\mu$	coeficiente de atrito
$W$	velocidade do vento, m/s
$R_{curv}$	raio de curvatura da pista, m
$\theta_{pista}$	acive da pista, rad
<b>[Controle]</b>	
$\alpha$	porcentagem de uso da potência do motor
$\beta_d$	porcentagem de uso do freio dianteiro
$\beta_t$	porcentagem de uso do freio traseiro
<b>[Índices de utilização]</b>	
$u_{ad,d}$	utilização da aderência dianteira
$u_{ad,t}$	utilização da aderência traseira
$u_{no,d}$	utilização da normal dianteira
$u_{no,t}$	utilização da normal traseira

Tabela 4: Funções externas - **get-par-s3.sci** e **func-s3.sci**

Função	Entrada	Saída	Linhas
<b>get-par-s3.sci</b>			
F0: <i>get_parametros_v3()</i>		$sP$ $sA$	1-166 168-233
<b>func-s3.sci</b>			
F1: <i>eval_parmot_v2()</i>		$a_i, b_i, c_i$ e $d_i$	2-46
F2: <i>eval_Pmotmax()</i>	$\omega_{motor}$	$P_{motor,max}$	49-59
F3: <i>eval_efic()</i>	$\omega_{motor}, \alpha$	$\eta_m$	62-67
F4: <i>eval_Pcomb()</i>	$P_{int}, \omega_{motor}, \alpha$	$P_{comb,max}$	70-81
F5: <i>eval_Pmaxroda()</i>	$V$	$P_{pro,max}$	84-105
F6: <i>get_vol()</i>	$\theta$	$\mathbb{V}, A_{troca}$	108-116
F6: <i>get_xi()</i>	$\theta, \omega_{motor}$	$\xi$	119-132
F7: <i>get_comp()</i>	$\theta, \mathbb{V}, \xi$	$y, s_\nu, \bar{u}_f, \bar{u}_f^*, \bar{c}_v, \bar{c}_p, M$	135-169
F8: <i>TparaU()</i>	$\bar{u}_f^*, \bar{c}_v, n_{carga}, \mathbb{T}$	$U$	172-176
F9: <i>UparaT()</i>	$\bar{u}_f^*, \bar{c}_v, n_{carga}, U$	$\mathbb{T}$	179-183
F10: <i>Função S()</i>	$t, x, V$	$a, \mathbf{sE}$	186-229
F11: <i>get_pista_Fpos</i>	$x, \mathbf{sE}$	$\mathbf{sE}$	232-247
F12: <i>get_teta_pista()</i>	$x$	$\theta_{pista}$	250-254
F13: <i>get_W()</i>	$x$	$W$	257-261
F14: <i>get_coefmu()</i>	$x$	$\mu$	264-268
F15: <i>get_RCurvatura()</i>	$x$	$R_{curv}$	271-281
F16: <i>get_aceleracao()</i>	$V, \mathbf{sE}$	$a$	284-288
F17: <i>get_utili()</i>	$x, \mathbf{sE}$	$\mathbf{sE}$	291-319
F18: <i>get_alphabeta()</i>	$x, V, \mathbf{sE}$	$\mathbf{sE}$	322-348
F19: <i>get_Vdes()</i>	$x$	$V_{des}$	351-360
F20: <i>get_vetor_Vseg()</i>	—	$\mathbf{V}_{seg}$	363-376
F21: <i>get_Vseg()</i>	$x, \mathbf{V}_{seg}$	$V_{seg}$	380-386

Tabela 5: Solução computacional do movimento da moto - **moto-s3.sce**

<b>Bloco</b>	<b>Linhas</b>	<b>Descrição</b>
B1: Comandos ao sistema	2-4	limpa o console, variáveis locais e globais
B2: Funções	09	carrega funções externas
B3: Dados	10	carrega estruturas <b>sP</b> e <b>sA</b>
B4: Velocidade de segurança	11	calcula vetor de velocidade de segurança, <i>get_vetor_Vseg()</i>
B5: <i>Solver</i>	16	resolve o sistema de equações diferenciais pela função <i>ode()</i> do <i>Scilab</i> , que chama a <i>Função S()</i>
B6: Saída	—	—
	20-68	B6.1: extrai resultados, chama a <i>Função S()</i>
	70-110	B6.2: calcula valores integrais
	112-123	B6.3: calcula percentuais
	125-129	B6.4: monitora problemas
	131-134	B6.5: saída de valores numéricos
	136-204	B6.6: gráficos

Tabela 6: *Função S()* - **func-s3.sci**, linhas 186-229

<b>Bloco</b>	<b>Linhas</b>	<b>Descrição</b>
B1: Extração das variáveis	189-190	$Q=[x,V]$
B2: Potência máxima na roda	193	<i>eval_Pmaxroda()</i>
B3: Pista e forças	194	<i>get_pista_Fpos()</i>
B4: Controle de velocidade	197	<i>get_alphabeta()</i>
B5: Calcula aceleração	198	<i>get_aceleracao()</i>
B6: Calcula ind. de util.	199	<i>get_utili()</i>
B7: Contr. de util. acel.	202-207	$\alpha = \alpha - \delta\alpha$
B8: Contr. de util. fren.	209-217	$\beta_i = \beta_i - \delta\beta$
B9: Grandezas aux.	220-223	calcula potência interna, potência do combustível e eficiência
B10: Retorno da função	226-227	retorna $V, a$ e <b>sE</b>